الثانية علوم رياضية	فرض 1 دورة 2	2015-14

التمرين الأول

الجزء (1) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $g_n(x) = n\ln x - \frac{1}{x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g_n(x)$

2) اعط جدول تغيرات الدالة g_n

أ- بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و استنتج إشارة $g_n(x)$

ب- بين أن $1<\alpha_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و استنتج أن $\alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ج- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n-1)=1$

الجزء (2) لكل عدد طبيعي غير منعدم n ،

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ بما يلي : $x>0$; $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{\ln x}$ و $f_n(0)=0$

1) أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_n(x)$

2) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين النقطة $a=0$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $a=0$

أ- بين أن $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\right)$ $f_n'(x)=\frac{e^{nx}}{(\ln x)^2}g_n(x)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_n

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نعطي $\alpha_1\simeq 1{,}75$ و $f_1(\alpha_1)\simeq 10{,}2$)

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\;dt$ و $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\;dt$

1) أحسب a_0 ; b_0

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

3) أ- بين أن $t\le\frac{\pi}{2}\sin t$ $\left(\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0<b_n\le\frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n}-a_{2n+2}\right)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

ج- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_{2n}}=0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad a_{2n+2}=(2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\cos^{2n+1} t\;dt$$

ب- استنتج أن : $\frac{a_{2n+2}}{n+1}=(2n+1)b_n-(2n+2)b_{n+1}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

ج- استنتج أن : $2\left(\frac{b_n}{a_{2n}}-\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

5) أ- بين أن المتتالية $U_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

تصحيح الفرض المحروس رقم 1

الدورة الثانية

تمرين 01: $g_n(x) = n\cdot\ln(x) - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{+\infty} n\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{+\infty} g_n(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{0^+} g_n(x) = \lim_{0^+} n\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{0^+} g_n(x) = \boxed{-\infty}$$

② $g_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$g_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

* بين أن $\exists!\alpha_n \in \mathbb{R}^{*+} / g_n(\alpha_n)=0$

- الدالة g_n متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$، ومنه $g_n(x)$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$

إذن $\boxed{\exists!\alpha_n \in \mathbb{R}^{+*} / g_n(\alpha_n)=0}$

- على المجال $]0,\alpha_n[$

$0 < x < \alpha_n$ و g_n تزايدية $\Rightarrow g_n(x) < g_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow g_n(x) < 0$

- على المجال $]\alpha_n,+\infty[$

$x > \alpha_n$ و g_n تزايدية $\Rightarrow g_n(x) > g_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow g_n(x) > 0$

x		α_n	
$g_n(x)$	$-$	0	$+$

③ لدينا $g_n(\alpha_n)=0$ و $g_n(1)<0$

$$g_n(1) < g_n(\alpha_n)$$

و g_n تزايدية: $\boxed{1 < \alpha_n}$

* $g_n(\alpha_n) = 0 \iff \ln\alpha_n = \frac{1}{n\cdot\alpha_n}$

$\alpha_n > 1 \Rightarrow \alpha_n\cdot n > n$

ومنه $\frac{1}{\alpha_n\cdot n} < \frac{1}{n}$

إذن $\ln\alpha_n < \frac{1}{n}$ ومنه $\alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$

* لدينا $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$

و $\lim_{+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

وبالتالي

$$\lim_{+\infty} \alpha_n = \boxed{1}$$

* بين أن $\lim\limits_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = 1$

$g_n(\alpha_n) = 0 \iff n = \dfrac{1}{\alpha_n \ln \alpha_n}$

و منه

$$\lim_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = \lim_{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - 1}{\ln \alpha_n}$$

$$\lim_{+\infty} \alpha_n = 1 \implies \lim_{+\infty} \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n - 1} = 1$$

و $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\alpha_n} = 1$

إذن $\lim\limits_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = \boxed{1}$

II

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{\ln x} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) نهايات f_n

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{nx}}{\ln(x)}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to 1} e^{nx} = e$

و $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0$

$x > 1 \implies \ln(x) > 0$

$\implies \lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = +\infty$

$x < 1 \implies \ln(x) < 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = -\infty$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{\ln(x)} = \lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{nx} \cdot \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{nx} = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

و منه $\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \boxed{+\infty}$

2) لدينا

$$\lim_{0^+} f_n(x) = \lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{\ln(x)}$$

$$\lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{\ln x} = 0 \impliedby \begin{cases} \lim\limits_{0^+} e^{nx} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$\impliedby \lim\limits_{0^+} f_n(x) = f_n(0)$

f_n متصلة على يمين 0 .

ب)

$$\lim_{0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{x \ln x}$$

$$\lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{x \ln x} = -\infty \impliedby \begin{cases} \lim\limits_{0^+} e^{nx} = 1 \\ \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0^- \end{cases}$$

f_n غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و C_n يقبل على يمين 0 نصف مماس عمودي.

3)

$$f_n'(x) = \frac{n \cdot e^{nx} \ln(x) - \frac{e^{nx}}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{\cancel{x} \cdot e^{nx}\left(n \ln(x) - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\,(\ln(x))^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{e^{n \cdot x}}{(\ln(x))^2} \cdot g_n(x)$$

تمرين 02 :

1)
$$a_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$
$$b_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

2)
$$a_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos^{n+1} t\,dt$$

نضع :

$$u' = -(n+1)\cos^n t \sin t \qquad \Leftarrow \begin{cases} u = \cos^{n+1} t \\ v' = \cos t \end{cases}$$
$$v = \sin t$$

$$a_{n+2} = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n t \cdot \sin^2 t\,dt$$
$$= (1\times 0 - 1\times 0) + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,(1 - \cos^2 t)\,dt$$
$$a_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t\,dt$$
$$(n+2)\,a_{n+2} = (n+1)\,a_n$$
$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,a_n}$$

3) ب) استنتج $0 \leq b_n \leq \frac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$

لدينا $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$

$$0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t$$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] ; \cos^{2n} t \geq 0$ و

$$f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{(\ln(x))^2}\, g_n(x)$$

لدينا $\ln(x)^2 > 0$ و $e^{nx} > 0$

إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $g_n(x)$

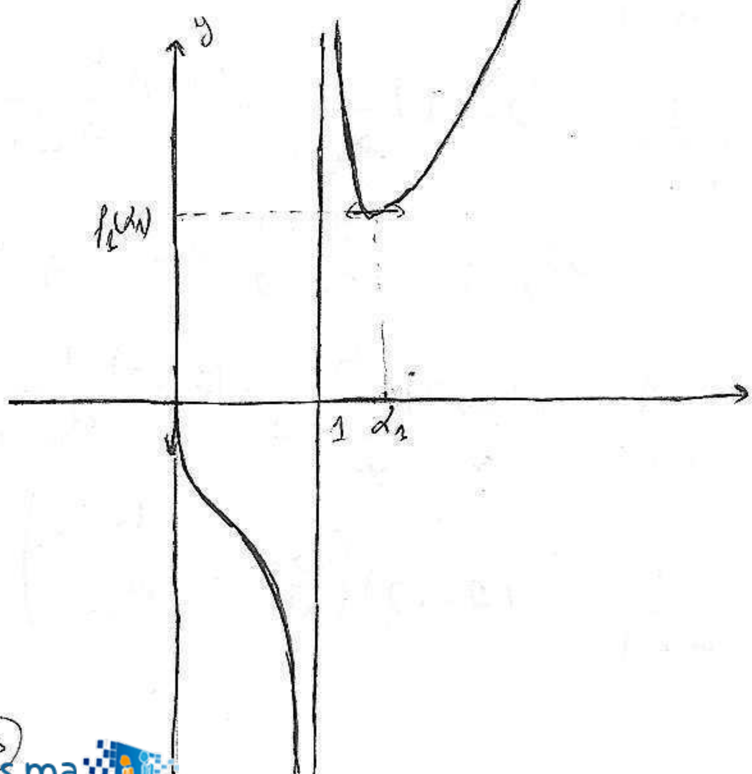
x	0	1	α_n	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	‖ $-$	0	$+$
$f_n(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow +\infty$

4)
$$\lim_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{x\cdot\ln(x)}$$
$$= \lim_{+\infty} n^2 \cdot \frac{e^{nx}}{(n\cdot x)^2} \times \frac{x}{\ln x}$$

$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{(nx)^2} = +\infty$ و $\lim_{+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$$\Leftarrow \lim_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$$

C_n يقبل فرع شلجميا في اتجاه محور الأراتيب



$$a_{2n+2} = 2\int_0^{\pi/2} t.\sin t.\cos^{2n+1} t\,dt$$ (ب

$$J_n = \int_0^{\pi/2} t.\sin t.\cos^{2n+1}(t)\,dt$$ نضع

$$u = \frac{1}{2}t^2 \Leftarrow \begin{cases} u' = t \\ v = \sin t.\cos^{2n+1} t \end{cases}$$

$$v'(t) = \cos^{2n+2} t - (2n+1)\cos^{2n} t \cdot \sin^2 t$$

$$v'(t) = (2n+2)\cos^{2n+2} - (2n+1)\cos^{2n}(t)$$

$$J_n = \left[\frac{1}{2}t^2 \sin(t)\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left((2n+2)t^2\cos^{2n+2} t - (2n+1)t^2\cos^{2n} t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2n+1)t^2.\cos^{2n} t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2n+2)^{2}\cos^{2n+2} t\,dt$$

$$J_n = \frac{1}{2}(2n+1)b_n - \frac{1}{2}(2n+2)b_{n+1}$$

ومنه

$$\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$$

استنتاج

$$\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} = (2n+1)\frac{b_n}{a_{2n+2}} - (2n+2)\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}$$

$$a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n$$ و

$$\frac{1}{n+1} = (\cancel{2n+1})\frac{b_n}{\frac{\cancel{2n+1}}{2n+2}a_n} - (2n+2)\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}$$

$$\frac{1}{n+1} = (2n+2)\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$$

$$0 \leq t^2\cos^{2n} t \leq \frac{\pi^2}{4}\cos^{2n} t \cdot \sin^2 t$$

$$0 \leq t^2\cos^{2n} t \leq \frac{\pi^2}{4}\left(\cos^{2n} t - \cos^{2n+2} t\right)$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\,dt \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{2n} t - \cos^{2n+2} t\right)dt$$

إذن

$$\boxed{0 \leq b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)}$$

$$a_{2n} > 0$$

$$0 \leq \frac{b_n}{a_{2n}} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right)$$

$$a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}a_{2n}$$

$$0 \leq \frac{b_n}{a_{2n}} \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

بما أن

$$\lim_{+\infty} \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2n+2} = 0$$

إذن

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0}$$

$$a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos^{2n+1} t\,dt$$ (4

لدينا

$$a_{2n+2} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,dt$$

$$u(t) = t \Leftarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \cos^{2n+2} t \end{cases}$$

$$v'(t) = -(2n+2)\sin t.\cos^{2n+1} t$$

$$a_{2n+2} = \left[t.\cos^{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n+2)t\sin(t)\cos^{2n+1}$$

$$= (2n+2)\int_0^{\pi/2} t.\sin(t).\cos^{2n+1} t\,dt$$

و عليه $\frac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$

$$U_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad *$$

لدينا $\frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{b_{k-1}}{a_{2(k-1)}} - \frac{b_k}{a_{2k}}\right)$

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{1}^{n}\left(\frac{b_{k-1}}{a_{2(k-1)}} - \frac{b_k}{a_{2k}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_n}{a_{2n}}\right)$$

لدينا $\lim_{+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12}$$

و منه $\lim_{+\infty} U_n = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

$$V_n = \sum_{0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$U_{2n+1} = \sum_{1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$= \sum_{0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$$

$$U_{2n+1} = V_n + \frac{1}{4} U_n$$

$$V_n = U_{2n+1} - \frac{1}{4} U_n$$

$$\Longrightarrow \lim_{+\infty} V_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

من إنجاز: عمارة محمد يزيد

3) نضع $\varphi(t) = t - \frac{\pi}{2}\sin t$

و $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

لدينا $\varphi'(t) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos t$

و $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \ \varphi''(t) = \frac{\pi}{2}\sin t > 0$

$\Leftarrow$

t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
φ' متصلة	$1-\frac{\pi}{2} < 0$ ↗	0 ↗	1

$\Leftarrow$

$\exists!\, \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \varphi'(\alpha) = 0$

و منه

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	0	↘	$\varphi(\alpha)$	↗	0

و عليه، $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \ \varphi(t) \leq 0$

و بالتالي $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] : \ t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$