

السنة الدراسية : 2012/13	فرض محروس رقم 1	الثانوية الجاحظ التأهيلية
المدة: ساعتان	الدورة الاولى	نيابة زاكورة - تمزموط
استاذ: عبد الفتاح قويدر	في مادة الرياضيات	المستوى: 2 باك علوم تجريبية 1
		التنقيط
تمرين I:		7 ن
1- بين ان $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2; 0]$		1 ن
2- احسب النهايات التالية :		5 ن
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} + 3x$ (1)		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{x}$ (2)		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x - 1}$ (3)		
$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+22} - 3}{2x-10}$ (4)		
$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1$ (5)		
3- حل المترابحة التالية : $\sqrt[5]{2x - 1} \geq 2$		1 ن
تمرين II:		9 ن
نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 1$		
1- حدد $D_f$ ثم ادرس اتصال الدالة $f$ على $D_f$		1 ن
2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$		1 ن
3- ادرس قابلية اشتقاق $f$ قي 0 ثم اول نتيجة هندسيا		1.5 ن
4- احسب $\forall x \in D_f ; f'(x)$		1 ن
5- ضع جدول تغيرات الدالة $f$		1 ن
6- بين ان $f$ تقبل دالة عكسية على $I = D_f$ نحو مجال $J$ تم تحديده		1 ن
7- احسب $f(1)$ ثم بين ان $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق في $f(1)$ وحدد $(f^{-1})'(f(1))$		1 ن
8- حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$		1.5 ن
تمرين III (*):		4 ن
لتكن $f$ دالة عددية متصلة على مجال $[a; b]$		
ولتكن $x_1$ و $x_2$ و ... و $x_n$ اعداد حقيقية من المجال $[a; b]$		
ولتكن $f([a; b]) = [m; M]$		
نضع $\sum_{i=1}^n f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$		
1- بين ان $m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$		2 ن
2- استنتج ان $\exists c \in [a; b] ; f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$		2 ن
والله ولي التوفيق		

$$= \lim_0 \frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق في 0 ومنه فإن (Cf) يقبل مماسا معادلته :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{3}x$$

4- لنحسب f'(x) :

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x+1} - 1)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\forall x \in ]-1; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

5- جدول تغيرات الدالة f:

$$\forall x \in ]-1; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$$

ومنه فإن f تزايدية قطعاً على ]-1; +\infty[

- جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	+\infty
f'(x)		+
f(x)		→

6- لدينا f متصلة وتزايدية قطعاً على ]-1; +\infty[

ومنه فإن f تقبل دالة عكسية من ]-1; +\infty[ نحو المجال J

تحديد J : J = f(]-1; +\infty[) = [f(-1); \lim\_{x \rightarrow +\infty} f(x)[

لدينا f(-1) = -1 و \lim\_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty

وبالتالي فإن : J = [-1; +\infty[

7- لنحسب f(1) : f(1) = \sqrt[3]{2} - 1

لنحسب f'(1) : f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}

بما أن f قابلة للاشتقاق في 1 و f'(1) \neq 0 ، وبالتالي f^{-1} قابلة

للاشتقاق في f(1)

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = 3\sqrt[3]{4}$$

8- لنحدد f^{-1}(x) :

ليكن x و y عنصرين من المجال ]-1; +\infty[

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow y+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow y = (x+1)^3 - 1$$

$$\forall x \in [-1; +\infty[; f^{-1}(x) = (x+1)^3 - 1$$

### التمرين 3 :

1- لدينا x\_1 و x\_2 و ... و x\_n اعداد حقيقية من المجال [a; b]

$$f([a; b]) = [m; M] \text{ و}$$

فإن m \leq f(x\_i) \leq M لكل i من {1, 2; ..., n}

$$\underbrace{m + \dots + m}_n = nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \underbrace{M + \dots + M}_n = nM$$

ومنه m \leq \frac{1}{n} \sum\_{i=1}^n f(x\_i) \leq M

2- نضع ان : g(x) = f(x) - \frac{1}{n} \sum\_{i=1}^n f(x\_i)

بما أن f متصلة على المجال [a; b] فإن g متصلة على [a; b]

(عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

### تصحيح تمرين 1 :

1- لنبين ان: x^3 + x + 1 = 0 تقبل حلاً وحيداً في المجال [-2; 0]

لدينا x \rightarrow x^3 + x + 1 متصلة على \mathbb{R} وبالتحديد على مجال [-2; 0]

(لانها دالة حدودية)

وكذلك الدالة x \rightarrow x^3 + x + 1 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتحديد على مجال

[-2; 0] (لانها دالة حدودية)

وبالتالي : f'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 \geq 0

(لان x^2 \geq 0)

وبالتالي f دالة تزايدية على [-2; 0]

لنحسب f(0) \times f(-2)

$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$$

وبالتالي : f(0) \times f(-2) = 1 \times -9 = -9 < 0

ومنه فإن المعادلة f(x) = x^3 + x + 1 = 0 تقبل حل وحيداً في

المجال [-2; 0]

2- لنحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} + 3x \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + 3x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + 3\right) = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \text{ لان}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^{\frac{1}{3}}}{x} \quad (2)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0 \text{ لان}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}\right) = +\infty \quad (3)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} = 0 \text{ لان}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+22} - 3}{2x-10} = \lim_5 \frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22} + 3\sqrt[3]{x+22+3^2})} = \frac{1}{54} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \quad (5)$$

3- لنحل المتراجحة التالية : \sqrt[5]{2x-1} \geq 2

$$S = \left[\frac{33}{2}; +\infty\right] \text{ وبالتالي } \sqrt[5]{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 32 \Leftrightarrow x \geq \frac{33}{2}$$

### التمرين الثاني :

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

$$D_f = [-1; +\infty[ \text{ وبالتالي } x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0$$

1- الدالة -1 متصلة على \mathbb{R} وبالخصوص على [-1; +\infty[ (لانها دالة حدودية)

الدالة \sqrt[3]{x+1} متصلة على [-1; +\infty[

وبالتالي f متصلة على [-1; +\infty[ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - 1 = +\infty$$

2- (لان \lim\_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty)

3- لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 : f(0) = 0

$$\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

لنبين ان  $g(a) \times g(b) < 0$

لنحسب  $g(a)$

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) < 0$$

لان  $m < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  حسب سؤال (1)

لنحسب  $g(b)$

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = M - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) > 0$$

لان  $m > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  حسب سؤال (1)

ومنه  $g(a) \times g(b) < 0$

وبالتالي حسب ميرهنة القيم الوسطية فان المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على الاقل حل  $c$  في  $[a; b]$

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0$$

ومنه نستنتج ان  $\exists c \in [a; b] ; f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$