

$$= \lim_0 \frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق في 0 ومنه فإن (C<sub>f</sub>) يقبل مماسا معادلته :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{3}x$$

4- لنحسب f'(x) :

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x+1} - 1)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

وبالتالي  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$   $\forall x \in ]-1; +\infty[$

5- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$   $\forall x \in ]-1; +\infty[$  ومنه فإن f تزايدية قطعاً على  $]-1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$\rightarrow$

6- لدينا f متصلة وتزايدية قطعاً على  $]-1; +\infty[$  ومنه فإن f تقبل دالة عكسية من  $]-1; +\infty[$  نحو المجال J

تحديد J :  $J = f(]-1; +\infty[) = [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

لدينا  $f(-1) = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  وبالتالي فإن :  $J = [-1; +\infty[$

7- لنحسب f(1) :  $f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$

لنحسب f'(1) :  $f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

بما أن f قابلة للاشتقاق في 1 و  $f'(1) \neq 0$  ، وبالتالي f<sup>-1</sup> قابلة للاشتقاق في f(1)

وبالتالي  $(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = 3\sqrt[3]{4}$

8- لنحدد f<sup>-1</sup>(x) :

ليكن x و y عنصرين من المجال  $]-1; +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = x$

$\Leftrightarrow y+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow y = (x+1)^3 - 1$

وبالتالي  $\forall x \in [-1; +\infty[ ; f^{-1}(x) = (x+1)^3 - 1$

تصحيح تمرين 1 :

1- لنبين ان:  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $[-2; 0]$

لدينا  $x \rightarrow x^3 + x + 1$  متصلة على  $\mathbb{R}$  وبالتحديد على مجال  $[-2; 0]$  (لأنها دالة حدودية)

وكذلك الدالة  $x \rightarrow x^3 + x + 1$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالتحديد على مجال  $[-2; 0]$  (لأنها دالة حدودية)

وبالتالي :  $f'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 \geq 0$  (لأن  $x^2 \geq 0$ )

وبالتالي f دالة تزايدية على  $[-2; 0]$

لنحسب  $f(0) \times f(-2)$

$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$

و  $f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$

وبالتالي  $f(0) \times f(-2) = 1 \times -9 = -9 < 0$  : ومنه فإن المعادلة  $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حل وحيد في المجال  $[-2; 0]$

2- لنحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} + 3x \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + 3x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + 3\right) = -\infty$$

(لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^{\frac{2}{3}}}{x} \quad (2)$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}\right) = +\infty \quad (3)$$

(لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} = 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+22} - 3}{2x-10} = \lim_5 \frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22} + 3\sqrt[3]{x+22} + 3^2)} = \frac{1}{54} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \quad (5)$$

3- نحل المتراجحة التالية :  $\sqrt[5]{2x-1} \geq 2$

$$S = \left[\frac{33}{2}; +\infty\right]$$
 وبالتالي  $\sqrt[5]{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 32 \Leftrightarrow x \geq \frac{33}{2}$

التمرين 3 :

1- لدينا  $x_1$  و  $x_2$  و ... و  $x_n$  أعداد حقيقية من المجال  $[a; b]$  و  $f([a; b]) = [m; M]$

فإن  $m \leq f(x_i) \leq M$  لكل  $i$  من  $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\underbrace{m + \dots + m}_n = nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \underbrace{M + \dots + M}_n = nM$$

ومنه  $m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$

2- نضع ان :  $g(x) = f(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

بما أن f متصلة على المجال  $[a; b]$  فإن g متصلة على  $[a; b]$  (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

التمرين الثاني :

$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$

1-  $D_f = [-1; +\infty[$  وبالتالي  $x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0$

الدالة  $-1 \mapsto x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  وبالخصوص على  $[-1; +\infty[$  (لأنها دالة حدودية)

الدالة  $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$  متصلة على  $[-1; +\infty[$  وبالتالي f متصلة على  $[-1; +\infty[$  (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

2-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - 1 = +\infty$  (لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty$ )

3- لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 :  $f(0) = 0$

$$\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

لنبين ان  $g(a) \times g(b) < 0$

لنحسب  $g(a)$

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) < 0$$

لان  $m < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  حسب سؤال (1)

لنحسب  $g(b)$

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = M - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) > 0$$

لان  $m > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  حسب سؤال (1)

ومنه  $g(a) \times g(b) < 0$

وبالتالي حسب ميرهنة القيم الوسطية فان المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على الاقل حل  $c$  في  $[a; b]$

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0$$

ومنه نستنتج ان  $\exists c \in [a; b] ; f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$