| | | |
|---|---|---|
| الثانوية الجـــــــاحظ التأهيليـــــــة | فرض محروس رقم 2 الدورة الاولى في مادة الرياضيات | السنة الدراسية : 2012/13 |
| المستوى: 2 ع ت 1 | | المــــدة: ساعتـــــان |
| | | استـــــاذ : عبد الفتاح قويدر |

التنقيط

**تمرين I**: لتكن $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2+U_n} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ — ن6

1) احسب $U_1$ و $U_2$ — ن0.5

2) بين بالترجع $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq U_n < 2$ — 0.75

3) أ- تحقق من ان $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$ — ن1

ب- ادرس رتابة المتتالية $(U_n)$ — 0.75

ج- استنتج ان $(U_n)$ متقاربة — ن0.5

4) نضع $\forall n \in \mathbb{N} \;\; V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2}$

أ- بين ان $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها4 ثم حدد $V_n$ بدلالة n — ن1

ب- بين ان $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$ ثم احسب نهاية $(U_n)$ — ن1.5

**تمرين II**: — ن10

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x^2-1)} - x \; ; x > 1 \\ x\sqrt{1-x} \qquad ; x \geq 1 \end{cases}$

1- بين ان الدالة $f$ متصلة في 1 — ن0.5

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق $f$ على اليسار وعلى اليمين في 1 — ن1

ب- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها — ن0.5

3- ضع جدول تغيرات الدالة $f$ — ن1.5

4- أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها — ن1

ب- بين ان $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$، ماذا تستنتج ؟ — ن1

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى الدالة $f$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x$ — ن1

د- انشئ المنحنى $(C)$ في معلم متعامد ممنظم — ن1.5

5- بين ان $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $]1; +\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على $J$ تم تحديده — ن1

6- انشئ $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم السابق — ن1

**تمرين3(*)**: لتكن $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \; ; n \geq 1 \end{cases}$ — ن4

1- بين ان لكل n من $\mathbb{N}$ : $U_n \geq n$ ثم احسب نهاية $U_n$ — ن1

2- بين بالترجع ان : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$ — ن1

3- نضع ان $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

بين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}}$، ثم استنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$ — ن2

والله ولي التوفيق

| | | |
|---|---|---|
| الثانوية الجاحظ التأهيلية | تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة الاولى في مادة الرياضيات | سنة الدراسية :2012/2013 |
| المستوى : 2 باك علوم تجريبية | | استاذ : عبدالفتاح قويدر |

**تمرين الاول:**

لتكن $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2+U_n} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) احسب $U_1$ و $U_2$

$U_1 = \frac{3U_0+2}{2+U_0} = \frac{5}{3}$ و $U_2 = \frac{3U_1+2}{2+U_1} = \frac{21}{11}$

2) بين بالترجع $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq U_n < 2$

من اجل n=0 لدينا $U_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 2$ اذن $1 \leq U_0 < 2$

نفترض ان $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq U_n < 2$: و نبين ان$1 \leq U_{n+1} < 2$

لدينا $U_{n+1} - 2 = \frac{U_n-2}{U_n+2}$ و لدينا $1 \leq U_n < 2$فإن $\frac{U_n-2}{U_n+2} < 0$ اي $U_{n+1} < 2$

لدينا $U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n+2}$ و لدينا $U_n > 0$فإن $\frac{2U_n}{U_n+2} > 0$ اي $U_{n+1} > 1$

وبالتالي $1 \leq U_{n+1} < 2$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq U_n < 2$

3) أ- تحقق من ان $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+2}{2+U_n} - U_n = \frac{3U_n+2-U_n^2-2U_n}{2+U_n} = \frac{-U_n^2+U_n+2}{2+U_n} = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$$

ب- ادرس رتابة المتتالية $(U_n)$

لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq U_n < 2$ فإن $2 -_n > 0$

و $\frac{U_n+1}{2+U_n} > 0$ و منه $U_{n+1} > U_n$ و بالتالي فإن$(U_n)$ تزايدية قطعا

ج- استنتج ان $(U_n)$ متقاربة

بما أن $(U_n)$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2 فإنها متقاربة

4) نضع $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

أ- بين ان $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها4

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2} = \frac{\frac{U_n+1}{U_n-2}+1}{\frac{U_n+1}{U_n-2}-2} = \frac{4U_n+4}{U_n-2} = 4V_n$$

وبالتالي $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها4 و حدها الاول $-2$ $V_0=\frac{U_0+1}{U_0-2}=-2$

لنحدد $V_n$ بدلالة n : $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $V_n=V_0q^n=-2\times4^n$

ب- لنبين ان $U_n=\frac{2V_n+1}{V_n-1}$

$$V_n=\frac{U_n+1}{U_n-2}\quad\Leftrightarrow (U_n-2)\,V_n=U_n+1\ \Leftrightarrow U_n\,(V_n-1)=2V_n+1$$

وبالتالي $U_n=\frac{2V_n+1}{V_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

احسب نهاية $(U_n)$

$$U_n=\frac{2V_n+1}{V_n-1}=\frac{2\times-2\times4^n+1}{-2\times4^n-1}=\frac{-4^{n+1}+1}{-2\times4^n-1}=\frac{4^n(4-\frac{1}{4^n})}{4^n(2+\frac{1}{4^n})}=\frac{4-\frac{1}{4^n}}{2+\frac{1}{4^n}}$$

وبالتالي $\lim_{+\infty}U_n=\lim_{+\infty}\frac{4-\frac{1}{4^n}}{2+\frac{1}{4^n}}=2$ لان $\lim_{+\infty}\frac{1}{4^n}=0$

---

تمرين 2:

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x(x^2-1)}\ ; x>1\\ x\sqrt{1-x}\quad ; x\leq1\end{cases}$

-1 بين ان الدالة $f$ متصلة في 1

لدينا $f(0)=1$

$\lim_{1^+}f(x)=\lim_{1^+}\sqrt[3]{x(x^2-1)}=0=f(0)$ ومنه $f$ متصلة على يمين 1

$\lim_{1^-}f(x)=\lim_{1^-}x\sqrt{1-x}=0=f(0)$ ومنه $f$ متصلة على يسار 1

وبمان $\lim_{1^+}f(x)=\lim_{1^-}f(x)=0=f(0)$ وبالتالي f متصلة في 1

-2 أ- ادرس قابلية اشتقاق $f$ على اليسار وعلى اليمين في 1

لندرس قابلية اشتقاق $f$ على اليسار في 1

$$\lim_{1^-}\frac{x\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{1^-}\frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)}=\lim_{1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

وبالتالي $f$ غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1

لندرس قابلية اشتقاق $f$ على االيمين في 1

$$\lim_{1^+}\frac{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}{x-1}=\lim_{1+}\sqrt[3]{\frac{x(x^2-1)}{(x-1)^3}}=\lim_{1^+}\sqrt[3]{\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}}=+\infty$$

**وبالتالي $f$ غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1**

**ت- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها**

- **وبمان $f$ غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1 فأن منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس عمودي نحو الاسفل على يسار 1**
- **بمان $f$ غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1 فأن منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس عمودي نحو الاعلى على يمين 1**

**3- ضع جدول تغيرات الدالة $f$**

لكل $x>1$ لدينا $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$

**الدالة** $x\mapsto x(x^2-1)$ موجبة قطعا وقابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$

اذن الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$ قابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$

لدينا : $\forall x\in\,]1;+\infty[\,;f'(x)=\frac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}}$

اشارة **f’(x)** على $]1;+\infty[$ هي اشارة $3x^2-1$ بمان $x>1$ فإن $3x^2>3$ وبالتالي $3x^2-1>0$

ليكن $x$ عنصر من المجال $]-\infty;1[$ لدينا $f(x)=x\sqrt{1-x}$

**الدالة** $f=uv$ اذن **f** قابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ( لانها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق)

لدينا : $\forall x\in\,]1;+\infty[\,;f'(x)=\sqrt{1-x}+x\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

- اشارة **f’(x)** على $]1;+\infty[$ هي اشارة $2-3x$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| 2-3x | + | 0 | - |

❖ جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**4- أ- احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها**

احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$$

التاويل الهندسي :

**لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$**

**وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب بجوار $-\infty$**

**ب- بين ان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$،ماذا تستنتج ؟**

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x^2-1)}-x\right)=\lim_{+\infty}\frac{x^3-x-x^3}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}=\lim_{+\infty}\frac{-1}{x(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})^2}+\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x}=0$$

**(لان $\lim_{+\infty}x(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x=+\infty$)**

التاويل الهندسي :

**لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$**

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا معادلته y=x بجوار $+\infty$

ج-ادرس الوضع النسبي للمنحنى الدالة $f$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x$

$$f(x) - x = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}$$

وبماأن $\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2} + x\sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2 > 0$ و $-x < 0$ لكل $x$ من المجال $[1;+\infty[$

وبالتالي $f(x) - x < 0$ على المجال $[1;+\infty[$

د- انشئ المنحنى $(C)$ في معلم متعامد ممنظم

-5 بين ان $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على $J$ تم تحديده

- لدينا $x \mapsto x^3 - x$ متصلة و موجبة على المجال $[1;+\infty[$ ومنه $g$ متصلة على المجال $[1;+\infty[$ وتزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي $g$ تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J$

$$g([1;+\infty[) = [g(1);\lim_{+\infty} f(x)[ = [0;+\infty[$$

- انشئ $(C_{g^{-1}})$منحنى الدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم السابق

منحنايان $(C_{g^{-1}})$ و $(C_g)$ متماثلان بالنسبة للمنصف الاول للمعلم ، اي بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$

---

**تمرين3(*):** لتكن $(\mathrm{U_n})$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = U_1 = 1 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{U}_n + U_{n-1} \ ; \mathrm{n} \geq 1 \end{cases}$

-1 بين ان لكل n من $\mathbb{N}$ : $U_n \geq n$ ثم احسب نهاية $U_n$

- لنبين ان لكل n من $\mathbb{N}$ : $U_n \geq n$

من اجل n=0 لدينا $\mathrm{U_0} = 1$ و $1 \geq 0$ اذن $\mathrm{U_0} \geq 0$

نفترض ان : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \geq n$ و نبين ان $U_{n+1} \geq n + 1$

لدينا $\mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{U}_n + U_{n-1}$ و اي ان $\mathrm{U_{n+1}} - \mathrm{U}_n = U_{n-1} > 0$

(لان $U_{n-1} \geq n - 1 > 0$) ومنه فإن $(\mathrm{U_n})$ المتتالية تزايدية قطعا

اي ان $U_n \geq U_{n-1} \geq U_1$

وبالتالي $U_{n+1} = \mathrm{U}_n + U_{n-1} \geq n+1$ اي $U_{n+1} \geq n+1$

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}$ : $U_n \geq n$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \,;\; 1 \leq \mathrm{U_n} < 2$

احسب نهاية $U_n$ :

لدينا $\lim_{+\infty} n = +\infty$ وبما ان $U_n \geq n$ وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$

-2 بين بالترجع ان : $\forall n \in \mathbb{N}^* \,;\; {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

من اجل n=1 لدينا ${}_1 = 1$ و $\mathrm{U}_0 = 1$ و $\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_1 + U_0 = 2$

وبالتالي ${U_1}^2 = U_0 \times U_2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$

نفترض ان : $\forall n \in \mathbb{N}^* \,;\; {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

و نبين ان ${U_{n+1}}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

لدينا ${}_{n+1} = \mathrm{U}_n + U_{n-1}$ ومنه $\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_{n+1} + U_{n-1} \times \mathrm{U}_{n+1}$

فإن ${}_{n+1}{}^2 = \mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_{n+1} + {U_n}^2 - (-1)^n$

اي ${\mathrm{U}_{n+1}}^2 = \mathrm{U}_n(\underbrace{\mathrm{U}_{n+1} + U_n}_{U_{n+2}}) - (-1)^n$

وبالتالي ${}_{n+1}{}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \,;\; {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

-3 نضع ان $\forall n \in \mathbb{N} \,;\; V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

بين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$، ثم استنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$

لنبين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

لدينا $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ اي $V_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$

يعني ان $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n \times U_{n+2} - U_{n+1}^2}{U_n U_{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

(لان ${U_{n+1}}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$)

لنستنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$:

حسب سؤال 1) لدينا $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$ فإن $\lim_{+\infty} U_{n+1} = +\infty$

لان $U_{n+1} \geq n+1$

وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n \times U_{n+1} = +\infty$

وبماأن : $\frac{-1}{U_nU_{n+1}} \leq V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}} \leq \frac{1}{U_nU_{n+1}}$

ولدينا $\lim_{+\infty} \frac{1}{U_nU_{n+1}} = \lim_{+\infty} \frac{-1}{U_nU_{n+1}} = 0$

وبالتالي حسب مبرهنة الدركيين فإن $\lim_{+\infty} V_{n+1} - V_n = 0$