

## I. مجموعات الأعداد

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز  $\mathbb{N}$  و نكتب:  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$
- الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز  $\mathbb{Z}$  و نكتب:  $\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- الأعداد العشرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل  $\frac{a}{10^n}$  حيث:  $a \in \mathbb{Z}$  و  $n \in \mathbb{N}$  تكون مجموعة نرمز لها بالرمز  $D$  و نكتب:  $D = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \right\}$
- الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل  $\frac{a}{b}$  حيث:  $a \in \mathbb{Z}$  و  $b \in \mathbb{N}^*$  تكون مجموعة نرمز لها بالرمز  $\mathbb{Q}$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز  $\mathbb{R}$  على مستقيم  $(D)$  مزود بمعلم  $(O, I)$ ,
- كل عدد حقيقي يمكن أن نربطه بنقطة وحيدة من المستقيم  $(D)$ .
- عكسيا، كل نقطة  $M$  من المستقيم  $(D)$  تمثل عدد حقيقيا وحيدا  $x$  يسمى أفضولها.

### أمثلة : استعمال الرموز: $\mathbb{Z}; \mathbb{C}; \mathbb{E}; \mathbb{R}$

- العدد  $-7$  هو عنصر من  $\mathbb{Z}$  نكتب  $-7 \in \mathbb{Z}$  نقرأ: " $-7$  ينتمي الى  $\mathbb{Z}$ " في حين  $-7$  لا ينتمي الى  $\mathbb{N}$  و نكتب  $-7 \notin \mathbb{N}$
- لدينا  $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$  و  $\frac{2}{3} \notin D$  و ذلك لأنه لا يمكن كتابة  $\frac{2}{3}$  على الشكل  $\frac{a}{10^n}$  حيث  $a \in \mathbb{Z}$  و  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  لكن  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين  $a$  و  $b$  بحيث  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  و  $b$  غير منعدم.
- كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة  $\mathbb{N}$  توجد ضمن  $\mathbb{Z}$  و نكتب  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .
- ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة  $D$  ليست ضمن  $\mathbb{Z}$  و نكتب  $D \not\subset \mathbb{Z}$ .
- لأي هناك عناصر من  $D$  لا تنتمي الى  $\mathbb{Z}$ . كذلك: كل عنصر من  $D$  هو عنصر من  $\mathbb{Q}$ :  $D \subset \mathbb{Q}$ .
- و كل عنصر من  $\mathbb{Q}$  هو عنصر من  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . لدينا اذن:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

تمرين : حدد طبيعة كل عدد من الأعداد التالية:  $3 + \sqrt{9}$ ,  $\frac{6}{5}$ ,  $-\frac{\sqrt{100}}{5}$

## II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخاصياتها

### 1. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$

#### الجمع في $\mathbb{R}$

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية

$$a + b = b + a \quad (1)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad (2)$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (3)$$

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \quad (4)$$

## الضرب في $\mathbb{R}$

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية

$$a \times b = b \times a = ab = ba \quad .1$$

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc \quad .2$$

$$a \neq 0; a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1 \quad .3$$

**العمليات على الكسور:**  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية بحيث  $bd \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (5)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}; bc \neq 0 \quad (6)$$

$$-a \text{ يسمى مقابل } a \quad (7)$$

$$a - b = a + (-b) \quad (8)$$

$$-(a - b) = -a + b \quad (9)$$

$$\frac{1}{a} \text{ يسمى مقلوب العدد } a \text{ حيث } a \neq 0 \quad (10)$$

العدد  $\frac{a}{b}$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  و  $b \in \mathbb{R}^*$  يسمى خارج العدد  $a$  على  $b$ .  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

$$a = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = c \quad (11)$$

$$ad = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (12)$$

$$a = b \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = 1 \quad (13)$$

$$a = 0 \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = 0 \quad (14)$$

## 2. متطابقات هامة النشر و التعميل:

لكل  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad (2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad (3)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab - b^2) \quad (4)$$

النشر و التعميل:

$a$  و  $b$  و  $k$  أعداد حقيقية

$$k(a+b) = ka + kb \quad \blacksquare$$

$$k(a-b) = ka - kb \quad \blacksquare$$

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd \quad \blacksquare$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad \blacksquare$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \blacksquare$$

**ملحوظة:**

ننشر  $(a+b)(a+b)^2$  و  $(a-b)(a-b)^2$  و نحصل على المتطابقتين الهامتين التاليتين:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \blacksquare$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \blacksquare$$

**مثال:** عندما تعجز الآلة الحاسبة

$$A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007) \quad \text{أحسب:}$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحدتها

لتبسيط الحساب نضع:  $x = 200520052006$

إذن:  $200520052005 = x-1$  و  $200520052007 = x+1$ .

$$A = x^2 - (x-1)(x+1) \quad \text{و منه:}$$

$$= x^2 - (x^2 - 1)$$

$$= x^2 - x^2 + 1$$

$$= 1$$

$$A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007) = 1 \quad \text{إذن:}$$

### 3. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

**تعريف:**

ليكن  $a$  عددا حقيقيا غير منعدم و  $n \in \mathbb{N}$ .

$$a^1 = a; a^0 = 1 \quad \blacksquare$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{مرات العدد}} \quad \blacksquare$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \blacksquare$$

لكل  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^*$  و لكل  $m$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$  لدينا:

$$a^n \times b^n = (ab)^n \quad \blacksquare$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \blacksquare$$

$$(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n \quad \blacksquare$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \blacksquare$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}} \quad \blacksquare$$

### حالة خاصة: قوى العدد 10:

$$10^0 = 1 \text{ و } 10^1 = 10$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_n; n \in \mathbb{N}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,000 \dots 01}_n; n \in \mathbb{N}$$

### 4. الكتابة العلمية:

كل عدد عشري  $x$  موجب يكتب على الشكل  $x = a \times 10^p$  حيث  $p$  ينتمي إلى  $\mathbb{Z}$  و  $a$  عدد عشري بحيث  $1 \leq a < 10$ . هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

**ملحوظة:** إذا كان  $x$  عددا سالبا فان كتابته العلمية هي  $x = -a \times 10^p$

**مثال:** المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم, تكتب  $1,4959787 \times 10^8$  كلم.

### 5. الجذور المربعة:

#### تعريف:

ليكن  $x$  عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع  $x$ , العدد الحقيقي الموجب  $y$ .

$$\text{بحيث } x = y^2 \text{ و نكتب } \sqrt{x} = y.$$

$$\sqrt{x} = y \text{ يكافئ } x = y^2 \text{ و } y \geq 0.$$

$$\text{أمثلة: } \sqrt{9} = 3; \sqrt{(-7)^2} = 7; \sqrt{(ab)^2} = ab; \text{ إذا كان } ab > 0$$

**خاصية:** لكل  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^+$  لدينا:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; b > 0 \text{ و } (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \text{ و } (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ و } \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}; a > 0$$

$$\text{إذا كان } x \geq 0 \text{ و } y \geq 0 \text{ فان } \sqrt{x} = \sqrt{y} \text{ يكافئ } x = y.$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } x = 0.$$

$$\text{انتبه: } \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ و } \sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

$$\text{مثال مضاد: } \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ و } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \text{ إذن } \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$

### 6. التناسبية

**تعريف:**  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية بحيث  $bd \neq 0$

$$\text{نقول إن الأعداد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا و فقط إذا كان: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**مثال:** حدد العدد الحقيقي  $x$  إذا علمت أن الأعداد:  $x+1$  و  $3$  و  $x$  و  $2$  تكون في هذا الترتيب تناسبا