

## الحساب المثلثي - الجزء 1

الدورة الأولى  
15 ساعة

- القدرات المنتظرة**
- \* استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.
  - \* التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات

### I- تذكير و اضافات

#### 1- أنشطة للتذكير

##### تمرين 1

نعتبر الشكل التالي حيث  $OA = 4$  و  $AB = 3$  و  $H$  المسقط العمودي لـ  $A$  على  $(OB)$  :

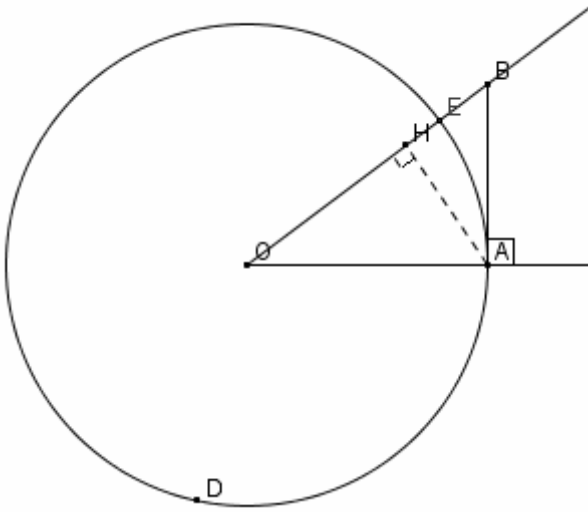
1- أحسب  $OB$

2- أ/ أحسب  $\cos(\widehat{AOB})$  ثم استنتج قيمة مقربة

لقياس الزاوية  $[\widehat{AOB}]$

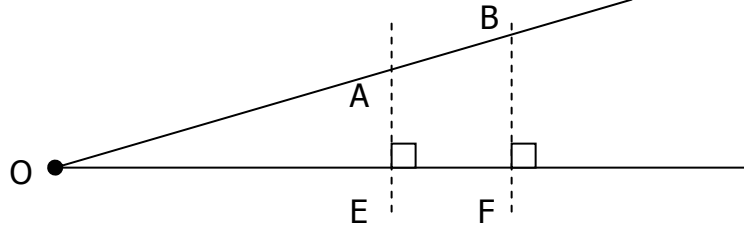
ب/ استنتج المسافة  $OH$

3- أحسب  $\tan(\widehat{AOB})$  ثم استنتج  $\sin(\widehat{AOB})$



##### تمرين 2

نعتبر الشكل التالي بحيث  $AB = 5$  و  $EF = 4$



أحسب  $\cos(\widehat{AOE})$  ثم استنتج  $\sin(\widehat{AOE})$

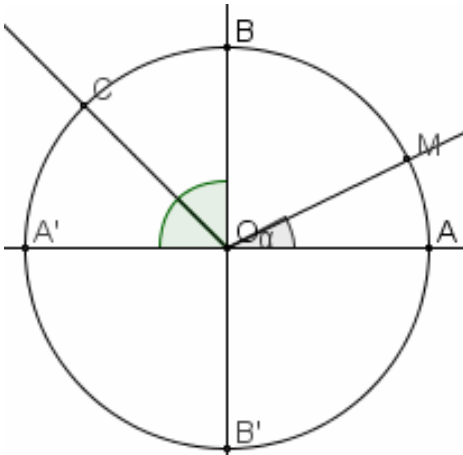
### 1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية - زاوية مركزية

#### 1- أنشطة

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $O$  و شعاعها  $R$ . نعتبر  $A$  و  $B$  و  $C$

و  $A'$  و  $B'$  و  $M$  نقط من  $(C)$  بحيث  $\alpha$  قياس للزاوية الهندسية

بالدرجة  $[\widehat{AOM}]$



1- اتمم الجدول التالي

[AOM]	[AOB']	[AOC]	[AOB]	[AOA']	الزاوية المركزية
$\alpha^\circ$					قياس الزاوية المركزية بالدرجة
$l$					طول القوس الهندسية المرتبطة بها

2- بين أن  $180^\circ$  و  $90^\circ$  و  $135^\circ$  و  $270^\circ$  متناسبة  $\pi R$  و  $\frac{\pi}{2}R$  و  $\frac{3\pi}{4}R$  و  $\frac{3\pi}{2}R$  على التوالي

3- حدد  $l$  بدلالة  $\alpha$  و  $\pi$  و  $R$

4- لتكن  $M'$  نقطة من  $(C)$  حيث طول القوس الهندسية  $[AM']$  هو  $R$ .

حدد  $\beta$  قياس الزاوية المركزية  $\widehat{AOM}$  بالدرجة.

## 2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

### أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها  $R$ ، تحصر قوسا دائرية طولها  $R$ .  
نرمز لها بـ  $rd$  أو  $rad$

$$\pi rd = 200gr = 180^\circ \quad (gr : \text{يرمز للград})$$

### ملاحظة

### ب/ نتيجة

إذا كان  $x$  قياس زاوية بالراديان و  $y$  قياسها بالدرجة و  $z$  قياسها بالград فان  $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ **قياس قوس هندسية** قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

### د/ طول قوس هندسية

إذا كان  $\alpha$  قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها  $R$ ، فان طول هذه القوس هو  $\alpha R$ .

### ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

### تمارين تطبيقية

#### تمرين 1

اتمم الجدول التالي

$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$		$90^\circ$	قياس زاوية بالدرجة
			$\frac{\pi}{3}$		قياسها بالراديان

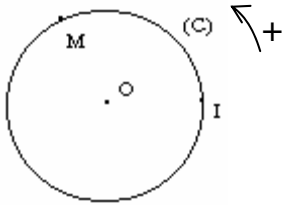
#### تمرين 2

ليكن  $ABC$  مثلثا متساوي الاضلاع حيث  $AB = 5cm$  و نعتبر  $(C)$  الدائرة التي مركزه  $A$  و تمر

من  $B$ . أحسب  $l$  طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية  $\widehat{BAC}$

## II- الدائرة المثلثية

### 1- توجيه دائرة - توجيه مستوي

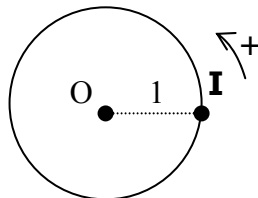


لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $O$  و شعاعها  $R$  و  $I$  نقطة من  $(C)$ .  
لو أردنا أن ننتقل من  $I$  لندور حول  $(C)$ ، لوجدنا أنفسنا أمام منحنين.  
توجيه الدائرة  $(C)$  هو اختيار أحد المنحنين منحى موجبا (أو مباشرا)  
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).  
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة.  
النقطة  $I$  تسمى أصل الدائرة  $(C)$ .

عندما توجه جميع دوائر المستوي توجيهها موحدنا فإننا نقول إن المستوي موجه.

### 2- الدائرة المثلثية

**تعريف** الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيهها موجبا.



## III- الأفاصل المنحنية.

### 1- الأفاصل المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثية

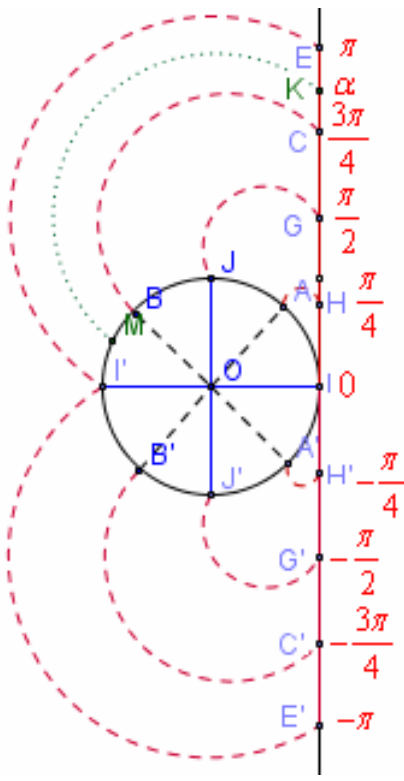
لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية أصلها  $I$ . نعتبر المجال  $]-\pi; \pi]$  حيث  $0$  أفصول  $I$  في المحور العمودي

على  $(OI)$ . حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لفنا القطعة الممثلة للمجال  $]-\pi; \pi]$  على الدائرة  $(C)$  نلاحظ أن كل عدد  $\alpha$  من  $]-\pi; \pi]$  ينطبق

مع نقطة وحيدة  $M$  من  $(C)$  و كل نقطة  $M$  من  $(C)$  تمثل عدد وحيد  $\alpha$  من  $]-\pi; \pi]$

العدد  $\alpha$  يسمى الأفضول المنحني الرئيسي لـ  $M$



### خاصية و تعريف

لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية أصلها  $I$ .

كل نقطة  $M$  من  $(C)$  تمثل عدد وحيد  $\alpha$  من  $]-\pi; \pi]$  و كل

عدد  $\alpha$  من  $]-\pi; \pi]$  يمثل نقطة وحيدة  $M$  من  $(C)$ .

العدد  $\alpha$  يسمى الأفضول المنحني الرئيسي لـ  $M$

ملاحظة قياس الزاوية الهندسية  $[IOM]$  هو  $|\alpha|$  راديان

### تمرين 1

على دائرة مثلثية  $(C)$  أصلها  $I$ . أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و

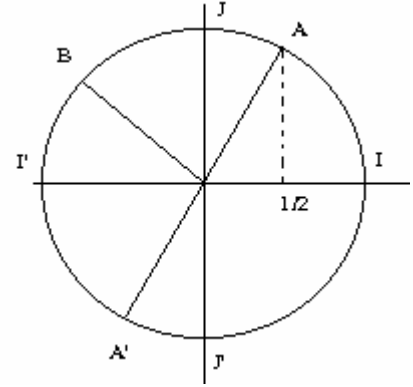
$D$  و  $E$  و  $F$  و  $G$  و  $H$  التي أفاصلها المنحنية الرئيسية هي  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{\pi}{4}$  و

$\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  و  $-\frac{\pi}{6}$  و  $-\frac{\pi}{4}$  و  $-\frac{\pi}{3}$  و  $-\frac{3\pi}{4}$  على التوالي

### تمرين 2

$(C)$  دائرة مثلثية أصلها  $I$ . حدد الأفاصل المنحنية الرئيسية

لنقط  $A; A'; J; J'; I'; I'$  كما يلي



### 2- الأفاصل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية

نعتبر  $(C)$  دائرة مثلثية أصلها  $I$ . نعتبر المحور  $(\Delta) = D(I, E)$

حيث  $(OI) \perp (\Delta)$ .

لتكن نقطة  $M$  من  $(C)$  أفضولها المنحني الرئيسي  $\alpha$ .

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع  $M$  اذا لفنا المستقيم العددي

على  $(C)$

نلاحظ اننا اذا لفنا المستقيم العددي الممثل لـ  $\mathbb{R}$  على  $(C)$  النقطة  $M$

تنطبق مع الأعداد

.....  $\alpha - 4\pi$  ;  $\alpha - 2\pi$  ;  $\alpha$  ;  $\alpha + 2\pi$  ;  $\alpha + 4\pi$  .....

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصل المنحنية لنقطة  $M$

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام على شكل  $\alpha + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

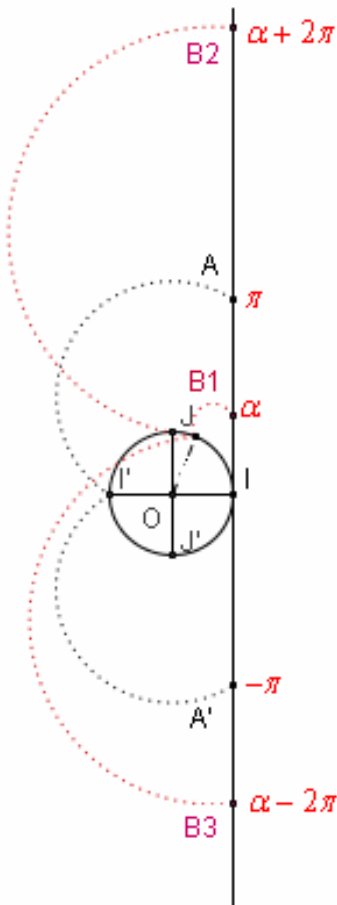
### تعريف

لتكن  $M$  نقطة من دائرة مثلثية  $(C)$  أصلها  $I$ . وليكن  $\alpha$

أفضولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل  $\alpha + 2k\pi$  بحيث  $k$  عنصر من  $\mathbb{Z}$

يسمى أفضولا منحنيًا للنقطة  $M$ .



**تمرين** حدد الأفاصل المنحنية للنقطتين  $A$  و  $B$  ذات الأفاصل المنحنيين الرئيسيين  $\frac{\pi}{5}$  و  $-\frac{2\pi}{3}$  على التوالي

**تمرين** دائرة مثلثية أصلها  $I$  .

نعتبر  $\frac{34\pi}{3}$  أفصول منحني لنقطة  $M$  . أنشئ  $M$

### **ب- خاصيات**

لتكن  $M$  نقطة من دائرة مثلثية  $(C)$  أصلها  $I$  . وليكن  $\alpha$  أفصولها المنحني الرئيسي بين إذا كان  $x$  و  $y$  أفصولين منحنيين للنقطة  $M$  فإنه يوجد عنصر  $\lambda$  من  $\mathbb{Z}$  بحيث  $x - y = 2\lambda\pi$

**خاصية** - إذا كان  $x$  و  $y$  أفصولين منحنيين للنقطة  $M$  فإنه يوجد عنصر  $\lambda$  من  $\mathbb{Z}$  بحيث  $x - y = 2\lambda\pi$  و نكتب  $[2\pi]$   $x \equiv y$  و نقرأ  $x$  يساوي  $y$  بترديد  $2\pi$  .

- إذا كان  $x$  أفصول منحني للنقطة  $M$  فإن جميع الأفاصل المنحنية للنقطة  $M$  تكتب على شكل  $x + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

**تمرين** حدد الأفاصل المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصلها المنحنية  $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

**تمرين** مثل على الدائرة المثلثية النقط  $C; B; A$  التي أفاصلها المنحنية على التوالي هي

$$7\pi ; \frac{37\pi}{3} ; \frac{-108\pi}{12}$$

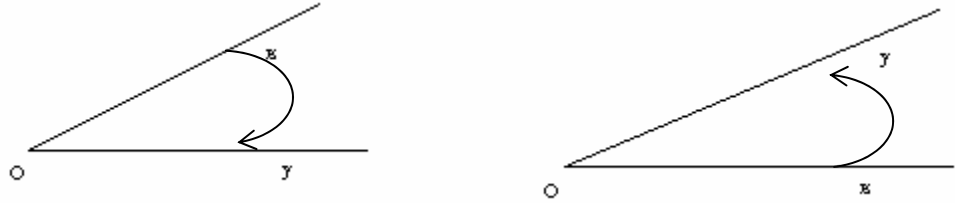
**تمرين** أنشئ على الدائرة المثلثية النقط  $M_k$  التي أفاصلها المنحنية  $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

### **IV- الزوايا الموجهة**

#### **4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم**

##### **أ- تعريف**

في المستوى الموجه نعتبر  $[O; x[$  و  $[O; y[$  نصفي مستقيم لهما نفس الأصل الزوج  $([O; x[; [O; y[)$  يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز  $(\overline{Ox; Oy})$



##### **ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم**

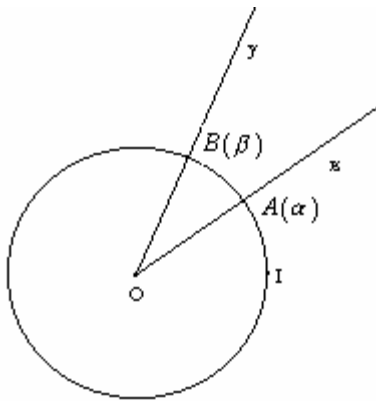
###### **تعريف وخاصة**

لتكن  $(\overline{Ox; Oy})$  زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و  $(C)$  دائرة مثلثية مركزها  $O$  ،  $A$  و  $B$  نقطتي تقاطع  $(C)$  و نصفي مستقيم  $[O; x[$  و  $[O; y[$  على التوالي

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  أفصولين منحنيين للنقطتين  $A$  و  $B$  على التوالي . العدد  $\beta - \alpha$  يسمى قياسا للزاوية الموجهة  $(\overline{Ox; Oy})$  .

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل  $\beta - \alpha + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

يسمى قياسا للزاوية الموجهة  $(\overline{Ox; Oy})$  .



نرمز لقياسات الزاوية  $(\overline{Ox; Oy})$  بالرمز  $(\overline{Ox; Oy})$  نكتب  $k \in \mathbb{Z}$   $(\overline{Ox; Oy}) = \beta - \alpha + 2k\pi$

و نكتب أيضا  $[2\pi]$   $(\overline{Ox; Oy}) \equiv \beta - \alpha$

## خاصة و تعريف

لكل زاوية موجة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال  $]-\pi; \pi]$  يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجة.

## خاصة

إذا كان  $\theta$  قياس للزاوية الموجة  $(\widehat{Ox;Oy})$  فإن  $\theta + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  قياس للزاوية  $(\widehat{Ox;Oy})$ .  
إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  قياسين للزاوية الموجة  $(\widehat{Ox;Oy})$  فإن  $\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$   
أي  $(k \in \mathbb{Z} / \alpha - \beta = 2k\pi)$

## ملاحظات

\* إذا كانت  $M$  نقطة من دائرة مثلثية أصلها  $I$  و مركزها  $O$  فإن الأضلاع المنحنية للمنحنى للنقطة  $M$  هي قياسات الزاوية الموجة  $(\widehat{OI;OM})$  و أن الأضلاع المنحني الرئيسي لـ  $M$  هو القياس الرئيسي للزاوية الموجة  $(\widehat{OI;OM})$

\* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجة  $(\widehat{Ox;Oy})$  هي قياس الزاوية الهندسية  $(\widehat{xOy})$ .

## بعض الزوايا الخاصة

### الزاوية المنعدمة

$$(\widehat{Ox;Ox}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

### الزاوية المستقيمة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \quad (\widehat{Oy;Ox}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

### الزاوية القائمة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية  $(\widehat{Ox;Oy})$  زاوية قائمة موجبة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية  $(\widehat{Ox;Oy})$  زاوية قائمة سالبة.

## تمرين

- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية  $\frac{601\pi}{6}$  ;  $\frac{-143\pi}{6}$  ;  $\frac{25\pi}{6}$
- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجة قياسها أحد القياسات  $47\pi$  ;  $-36\pi$  ;  $\frac{52\pi}{5}$  ;  $-\frac{25\pi}{3}$
- أنشئ زاوية موجة  $(\widehat{Ox;Oy})$  قياسها  $-\frac{234\pi}{5}$ .

## تمرين

أنشئ  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع حيث  $(\widehat{AB;AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

## ج- علاقة شال ونتائجها

### علاقة شال

إذا كانت  $[O;x]$  و  $[O;y]$  و  $[O;z]$  ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فإن

$$(\widehat{Ox;Oy}) + (\widehat{Oy;Oz}) \equiv (\widehat{Ox;Oz}) \pmod{2\pi}$$

### نتائج

\* إذا كان  $[O;x]$  و  $[O;y]$  نصفي مستقيم فإن  $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv -(\widehat{Oy;Ox}) \pmod{2\pi}$

\* إذا كانت  $[O;x]$  و  $[O;y]$  و  $[O;z]$  ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق  $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv (\widehat{Ox;Oz}) \pmod{2\pi}$  فإن  $[O;x]$  و  $[O;y]$  نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه إذا كان  $[Ox]$  نصف مستقيم و  $\alpha$  عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد  $[O; y]$  بحيث  $[2\pi]$   $(\widehat{Ox; Oy}) \equiv \alpha$ .

### د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

#### تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه و  $[O; x]$  و  $[O; y]$  نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$ .

زاوية زوج المتجهتين  $(\vec{u}; \vec{v})$  هي الزاوية الموجهة  $(\widehat{Ox; Oy})$  و يرمز لها بالرمز  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ .

#### ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  هي مجموعة قياسات الزاوية  $(\widehat{Ox; Oy})$ .

### علاقة شال ونائجها

#### علاقة شال

إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$$

#### نتائج

- \* إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين فان  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv -(\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) \quad [2\pi]$
  - \* إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$
- فان  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستقيمتين ولهما نفس المنحى.

#### تمرين

لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية مركزها  $O$  وأصلها  $I$ . نعتبر على  $(C)$  النقط التالية المعرفة بأفاصلها

$$A(\pi) \quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right) \quad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$$

أعط قياسا لكل من الزوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\widehat{OA; OA}) ; (\widehat{OB; OA}) ; (\widehat{OA; OE}) ; (\widehat{OE; OF})$$

### V - النسب المثلثية

#### 1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية

لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية مركزها  $O$  وأصلها  $I$ .

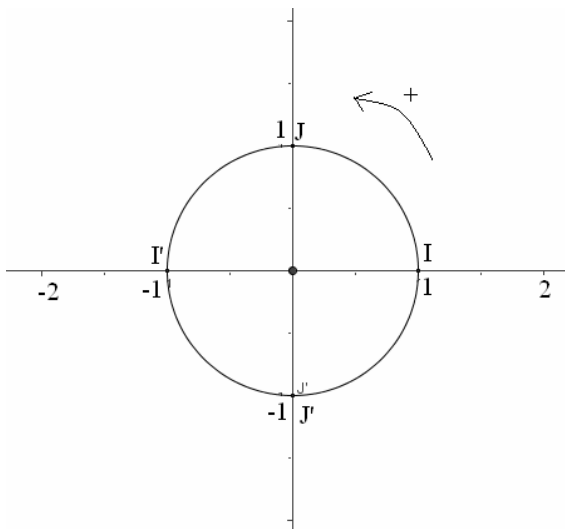
ولتكن  $J$  من  $(C)$  بحيث  $(\widehat{OI; OJ})$  زاوية قائمة موجبة

المعلم  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$  يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية  $(C)$ .

لتكن  $J'$  من  $(C)$  بحيث  $(\widehat{OI; OJ'})$  زاوية قائمة سالبة.

المعلم  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ'})$  يسمى المعلم المتعامد الممنظم

الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية  $(C)$ .



## 2- النسب المثلثية

### 1-2 تعاريف

لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية و  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$  المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن  $M$  نقطة من  $(C)$  و  $x$  أفضولا منحنيها لها. نعتبر  $C$  المسقط العمودي لـ  $M$  على  $(OI)$  و  $S$  المسقط العمودي لـ  $M$  على  $(OJ)$

\*- العدد الحقيقي أفضول النقطة  $M$  في المعلم  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$  يسمى جيب تمام العدد الحقيقي  $x$  نرمز له بـ  $\cos x$

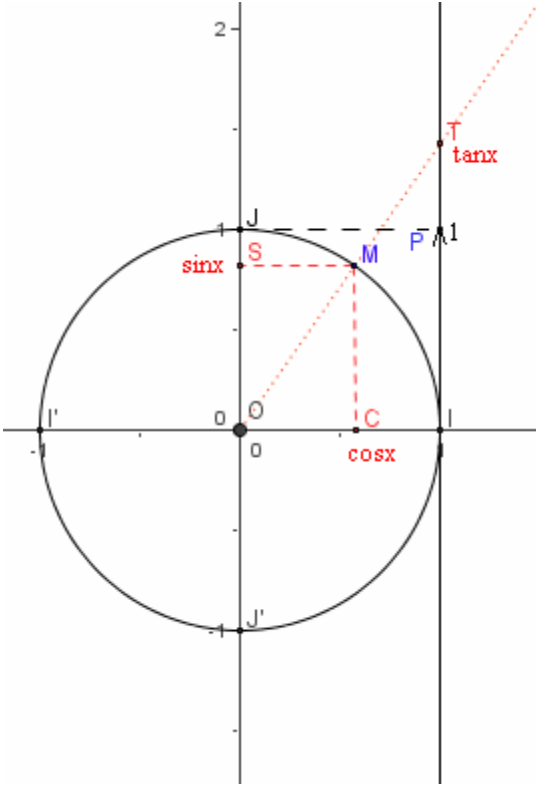
\*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة  $M$  في المعلم  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$  يسمى جيب العدد الحقيقي  $x$ . نرمز له بـ  $\sin x$

\*- ليكن  $\Delta$  المماس لـ  $(C)$  عند  $I$  و النقطة  $P(1;1)$ . لتكن  $T$  نقطة تقاطع  $(OM)$  و  $\Delta$  أي

$$k \in \mathbb{Z} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

العدد الحقيقي أفضول  $T$  في المعلم  $(I; P)$  يسمى

ظل العدد الحقيقي  $x$  نرمز له بـ  $\tan x$ .



### ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان  $x$  أفضول منحنى لنقطة  $M$  فان  $M(\cos x; \sin x)$

تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها  $\mathbb{R}$  يرمز لها بـ  $\cos$

تسمى دالة الجيب حيز تعريفها  $\mathbb{R}$  يرمز لها بـ  $\sin$

تسمى دالة الظل حيز تعريفها  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$  يرمز لها بـ  $\tan$

- الدالة  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \cos x$   
 - الدالة  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \sin x$   
 - الدالة  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \tan x$

### 2-2- خصائص

\*- كيفما كان وضع  $M$  نقطة من  $(C)$  أفضولها منحنى  $x$  النقطة  $C$  تنتمي الى القطعة  $[II']$

و  $S$  تنتمي الى  $[JJ']$  حيث  $J(0;1)$  ;  $J'(0;-1)$  ;  $I(1;0)$  ;  $I'(-1;0)$

لكل  $x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

\*- لكل  $x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

\*- لكل  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

\*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب  $x + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  ، أفاصل منحنية لنفس النقطة  $M$

لكل  $x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$

- مهما كانت  $M(x + k\pi)$  لدينا أفضول  $T$  هو  $\tan x$

لكل  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$

**حالة خاصة** لكل  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + \pi) = \tan x$

\*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \triangleright \\ & \text{نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة } \cos \text{ زوجية و أن الدالة } \sin \text{ فردية.} \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(-x) = -\tan x \quad \triangleright \end{aligned}$$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة  $\tan$  فردية.

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \triangleright \end{aligned}$$

### 3-2- نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

### تمارين

**تمرين 1** أحسب  $\cos \frac{34\pi}{3}$  ;  $\cos \frac{-37\pi}{4}$  ;  $\sin \frac{53\pi}{6}$  ;  $\sin \frac{-7\pi}{2}$

**تمرين 2** أ- حدد  $1 + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{11\pi}{6}$

ب- بسط  $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$



**تمرين 1**

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر  $\frac{267\pi}{6}$  و  $-\frac{238\pi}{3}$  الأضلاع المنحنيين للنقطتين  $A$  و  $B$ . لتكن  $C$  نقطة حيث  $[2\pi]$   $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$ .

1- حدد الأضلاع المنحنيين الرئيسيين للنقطتين  $A$  و  $B$   
 2- حدد القياس الرئيسي  $\widehat{(OA; OB)}$  ثم حدد  $\cos(\widehat{OA; OB})$

3- حدد القياس الرئيسي  $\widehat{(OC; OB)}$

4- مثل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  على الدائرة المثلثية

**تمرين 2**

1- أحسب  $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$

2- علما أن  $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$  حدد  $\cos \frac{\pi}{8}$  و  $\sin \frac{\pi}{8}$  و  $\cos \frac{7\pi}{8}$

**تمرين 3**

1- بسط  $C = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(3\pi + x)$

2- بين أن  $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$

**الحل**

**تمرين 1**

1- نحدد الأضلاع المنحنيين الرئيسيين للنقطتين  $A$  و  $B$

لدينا  $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$  و  $\frac{267\pi}{6} = 2 \times 22\pi + \frac{\pi}{2}$  حيث  $\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$

إذن  $\frac{\pi}{2}$  الأضلاع المنحني الرئيسي للنقطة  $A$

لدينا  $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$  و  $-\frac{238\pi}{3} = 2 \times -40\pi + \frac{2\pi}{3}$  حيث  $\frac{2\pi}{3} \in ]-\pi; \pi]$

إذن  $\frac{2\pi}{3}$  الأضلاع المنحني الرئيسي للنقطة  $B$

2- نحدد القياس الرئيسي  $\widehat{(OA; OB)}$  ثم نحدد  $\cos(\widehat{OA; OB})$

$\frac{\pi}{6} \in ]-\pi; \pi]$  و  $\widehat{(OA; OB)} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

إذن القياس الرئيسي  $\widehat{(OA; OB)} = \frac{\pi}{6}$  ومنه  $\cos(\widehat{OA; OB}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي  $\widehat{(OC; OB)}$

لدينا  $[2\pi]$   $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \left(\widehat{OC;OA}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = -\left(\widehat{OA;OC}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

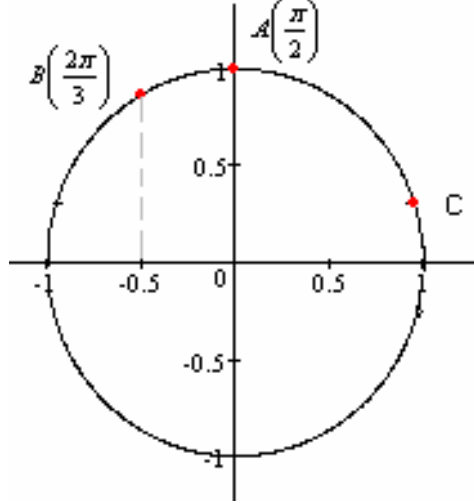
$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{42\pi}{5} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{257\pi}{30} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{17\pi}{30} + 8\pi + 2k\pi = \frac{17\pi}{30} + 2(4+k)\pi$$

وحيث  $\frac{17\pi}{30} \in ]-\pi; \pi]$  فان  $\frac{17\pi}{30}$  هي القياس الرئيسي  $\left(\widehat{OC;OB}\right)$

4- نمثل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  على الدائرة المثلثية



## تمرين 2

1- نحسب  $A$  و  $B$

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

$$\cos^2 \frac{7\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8}$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \cos^2 \frac{3\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos \frac{3\pi}{8}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{و بالتالي}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) = 2 \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

ومنه

$$A + B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = 4 - A = 4 - 2 = 2 \quad \text{اذن} \quad A + B = 4 \quad \text{و بالتالي}$$

2- نحدد  $\cos \frac{7\pi}{8}$  و  $\sin \frac{\pi}{8}$  و  $\cos \frac{\pi}{8}$

$$1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} \quad \text{نعلم أن } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ لدينا}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ ومنه}$$

وحيث أن  $\frac{\pi}{8} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  فإن  $\cos \frac{\pi}{8} > 0$  و  $\sin \frac{\pi}{8} > 0$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ و } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

### تمرين 3

$$C = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(3\pi + x) \quad \text{1- نيسط}$$

$$\sin(3\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \text{لدينا}$$

$$\cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) = \cos\left(14\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{و}$$

$$\cos(7\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{و}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \quad \text{و}$$

$$C = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{إذن}$$

2- نبين أن  $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$

$$\begin{aligned} \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1 \end{aligned}$$

### تمارين غير محلولة التمرين 1

1- حدد الأفصول المنحني الرئيسي المرتبط بالأفصول المنحنيين التاليين  $\frac{789\pi}{7}$  ;  $\frac{-214\pi}{5}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفصول المنحنية  $\frac{-\pi}{6}$  و  $\frac{2\pi}{3}$  و  $\frac{23\pi}{2}$  و  $\frac{-59\pi}{4}$

3- بين أن الأعداد التالية تمثل الأفصول المنحنية لنفس النقطة  $\frac{601\pi}{6}$  ;  $\frac{-143\pi}{6}$  ;  $\frac{25\pi}{6}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط  $M_k$  التي أفصولها المنحنية هي  $\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{4}$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

4- ليكن  $x$  الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة  $M$

حدد الأفصول المنحنية لنقطة  $M$  التي تنتمي الى المجال  $I$  في الحالتين التاليتين

$$I = \left[ \frac{-33\pi}{5}; \frac{-13\pi}{5} \right] \quad x = \frac{-2\pi}{5} \quad (b) \quad I = \left[ \frac{34\pi}{3}; \frac{43\pi}{3} \right] \quad x = \frac{\pi}{4} \quad (a)$$

5- ضع على دائرة مثلثية النقط  $M$  التي أفصولها المنحني  $x$  حيث  $[2\pi]$   $3x \equiv \frac{\pi}{2}$

6- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات  
 $47\pi$  ;  $-36\pi$  ;  $\frac{52\pi}{5}$  ;  $-\frac{25\pi}{3}$

### التمرين 2

- أنشئ مثلثا  $ABC$  متساوي الساقين في الرأس  $A$  حيث  $[2\pi]$   $(\widehat{AB;AC}) \equiv -\frac{2\pi}{5}$   
 - حدد بالرديان قياس كل من الزوايا  $(\widehat{BA;BC})$  و  $(\widehat{BA;AC})$  و  $(\widehat{CB;AC})$

### التمرين 3

على الدائرة المثلثية نعتبر  $A\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ . أعط القياس الرئيسي للزاوية  $(\widehat{OA;OM})$  في كل من الحالتين

(a)  $\frac{27\pi}{2}$  أفصول منحني لنقطة  $M$  (b)  $(\widehat{OJ;OM}) \equiv \frac{23\pi}{8}$   $[2\pi]$

### التمرين 4

1- حدد النسب المثلثية للأعداد  $\cos\frac{7\pi}{6}$  ;  $\tan-\frac{73\pi}{3}$  ;  $\sin\frac{15\pi}{4}$  ;  $\sin\frac{-23\pi}{3}$   
 2- إذا علمت أن  $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$  فأحسب  $\cos\frac{7\pi}{8}$  ;  $\tan\frac{7\pi}{8}$  ;  $\sin\frac{\pi}{8}$  ;  $\sin\frac{3\pi}{8}$   
 $\cos\frac{327\pi}{8}$  ;  $\tan\frac{-78\pi}{8}$  ;  $\sin\frac{-25\pi}{8}$

### التمرين 5

ليكن  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  نضع  $A = \frac{\tan x - 1}{\tan^2 x + 1}$   
 1- بين أن  $A = \cos x \sin x - \cos^2 x$   
 2- إذا علمت أن  $\sin x = \frac{4}{5}$  فأحسب  $A$   
 3- إذا علمت أن  $A = 0$  فأحسب  $x$

### التمرين 6

1- إذا علمت أن  $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$  أحسب  $\cos\frac{7\pi}{8}$  ;  $\tan\frac{7\pi}{8}$  ;  $\sin\frac{\pi}{8}$  ;  $\sin\frac{3\pi}{8}$   
 2- بسط  $A = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \cdot \sin^2 x$   $B = (1 + \sin x + \cos x)^2 - 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$   
 $C = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$   $D = \cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$

### التمرين 7

1- أحسب  $\tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5} + \tan\frac{4\pi}{5}$   
 2- ليكن  $x \in \mathbb{R}$   
 بسط  $\sin(\pi - x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)$   
 $\sin(x - 7\pi) + \sin(x + 9\pi)$   
 $\cos\left(x - \frac{27\pi}{2}\right) - \sin(x + 27\pi)$

### التمرين 8

ليكن  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  نعتبر  $A = \cos^4 x + \sin^4 x - (\sin x \cos x)(\cos x - \sin x)^2$   
 1- بين أن  $A = 1 - \sin x \cdot \cos x$

$$-2 \text{ علما أن } \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ أحسب } A \text{ من أجل } x = \frac{11\pi}{12}$$

### التمرين 9

نضع  $x \in [0; \pi]$  حيث  $P(x) = \cos^6 x + \sin^6 x - \frac{1}{4}$

$$-1 \text{ بين أن } P(x) = \frac{3}{4}(2\cos^2 x - 1)^2$$

-2 أكتب  $P(x)$  بدلالة  $\tan x$

-3 علما أن  $\tan x = -\sqrt{2}$  أحسب  $P(x)$  و  $\cos x$ .

### التمرين 10

حدد

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad B = 1 + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \dots + \sin \frac{13\pi}{7}$$

### التمرين 11

مثل على دائرة المثلثية النقط  $M$  التي أفصلها المنحنى  $\alpha$  حيث  $\cos \alpha = \frac{-3}{4}$ ، ثم لون بالأحمر جزء الدائرة

المثلثية الذي يحتوي على النقط التي أفصلها المنحنى  $\beta$  حيث  $\cos \beta \leq -\frac{3}{4}$

### التمرين 12

لون بالأحمر مجموعة النقط  $M$  التي أفصلها المنحنى  $\theta$  حيث  $\tan \theta \geq 2$

### التمرين 13

على الدائرة المثلثية انشئ النقطتين  $M_1$  و  $M_2$  الذي أرتوبيهما  $\frac{1}{2}$

-1 حدد مجموعة النقط  $M$  التي أفصلها المنحنى  $x$  حيث  $\sin x > \frac{1}{2}$

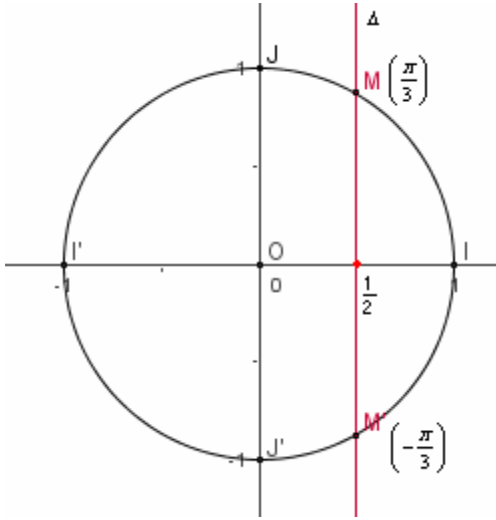
-2 حدد مجموعة الأعداد  $x$  من  $[-\pi; \pi]$  حيث  $\sin x > \frac{1}{2}$

-3 حدد مجموعة الأعداد  $x$  من  $[0; 2\pi[$  حيث  $\sin x > \frac{1}{2}$

-4 حدد مجموعة الأعداد  $x$  من  $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$  حيث  $\sin x > \frac{1}{2}$

## الحساب المثلثي - الجزء 2-

الدرس الأول عدد الساعات: 15	القدرات المنتظرة التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية
--------------------------------	--



### I- المعادلات المثلثية

**1- المعادلة**  $\cos x = a$

**مثال 1** حل  $\cos x = \frac{1}{2}$   $x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم  $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$  يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين  $M$  و  $M'$  أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما  $\frac{\pi}{3}$  و  $-\frac{\pi}{3}$ .

بما أن  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  بحيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي الأفاصل المنحنية للنقطة  $M$

و  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  بحيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي الأفاصل المنحنية للنقطة  $M'$

فإننا نستنتج أن  $\cos x = \frac{1}{2}$  تكافئ  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  أو  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

**مثال 2** حل  $\cos x = \frac{1}{2}$   $x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$  تكافئ  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  أو  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال  $[-2\pi; 2\pi]$

فان  $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$  أو  $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

لدينا  $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$  تكافئ  $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$  تكافئ  $k = 0$  أو  $k = -1$

ومنه  $x = \frac{\pi}{3}$  أو  $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا  $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$  تكافئ  $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$  تكافئ  $k = 0$  أو  $k = 1$

ومنه  $x = -\frac{\pi}{3}$  أو  $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن  $S = \left\{ -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

**خلاصة** \* المعادلة  $\cos x = a$  لا تقبل حلا إذا كان  $a < -1$  ∨  $a > 1$

\*  $\cos x = 1$   $x \in \mathbb{R}$  إذا فقط إذا كان  $x = 2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$

\*  $\cos x = -1$   $x \in \mathbb{R}$  إذا فقط إذا كان  $x = \pi + 2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$

\* إذا كان  $-1 < a < 1$  فإن يوجد عنصر  $\alpha$  من  $]0; \pi[$  حيث  $\cos \alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة  $\cos x = a$  في  $\mathbb{R}$  هي  $x = \alpha + 2k\pi$  أو  $x = -\alpha + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

## تمرين حل المعادلات

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad x \in ]-\pi; 3\pi] \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in [\pi; 2\pi[ \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

## الحل

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad \text{نحل}^*$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x)$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in ]-\pi; 3\pi] \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{نحل}^*$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ومنه} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 2x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{تكافئ} \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 2x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \quad \text{تكافئ}$$

و حيث  $x \in ]-\pi; 3\pi]$  فان

$$-1 < \frac{19}{24} + k \leq 3 \quad \text{أي} \quad -\pi < \frac{19\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا} \quad x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \quad \text{من أجل}$$

$$-\frac{43}{24} < k \leq \frac{53}{24} \quad \text{ومنه}$$

و حيث  $k \in \mathbb{Z}$  فان  $k = -1$  أو  $k = 0$  أو  $k = 1$  أو  $k = 2$

$$x = \frac{19\pi}{24} + 2\pi = \frac{67\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} + \pi = \frac{43\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} - \pi = -\frac{5\pi}{24} \quad \text{إذن}$$

$$-1 < -\frac{1}{24} + k \leq 3 \quad \text{أي} \quad -\pi < -\frac{\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا} \quad x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{من أجل}$$

$$-\frac{23}{24} < k \leq \frac{73}{24} \quad \text{ومنه}$$

و حيث  $k \in \mathbb{Z}$  فان  $k = 0$  أو  $k = 1$  أو  $k = 2$  أو  $k = 3$

$$x = -\frac{\pi}{24} + 3\pi = \frac{71\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + 2\pi = \frac{47\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + \pi = \frac{23\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + 0 \cdot \pi = -\frac{\pi}{24} \quad \text{إذن}$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{24}, -\frac{\pi}{24}, \frac{19\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{43\pi}{24}, \frac{47\pi}{24}, \frac{67\pi}{24}, \frac{71\pi}{24} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in [\pi; 2\pi[ \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{نحل}^*$$

$$2X^2 + 3X + 1 = 0 \quad \text{نضع} \quad \cos x = X \quad \text{المعادلة تصبح}$$

ليكن  $\Delta$  مميز المعادلة

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$$

$$X = \frac{-3-1}{4} = -1 \text{ أو } X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$\cos x = -1 \text{ أو } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi \text{ تكافئ } \cos x = -1 \text{ لدينا}$$

$$\text{و حيث } x \in [\pi; 2\pi[ \text{ فان } \pi \leq \pi + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } 0 \leq k < \frac{1}{2} \text{ ومنه } k = 0 \text{ اذن } x = \pi$$

$$\text{لدينا } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ أي } \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ومنه } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

و حيث  $x \in [\pi; 2\pi[$  فان

$$\text{من أجل } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ لدينا } \pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } \frac{5}{6} \leq k < \frac{4}{3} \text{ ومنه } k = 1$$

$$\text{إذن } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{من أجل } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ لدينا } \pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } \frac{1}{6} \leq k < \frac{2}{3} \text{ لا يوجد عدد صحيح نسبي}$$

يحقق المتفاوتة الأخيرة

$$\text{إذن } S = \left\{ \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

**-2 المعادلة**  $\sin x = a$

$$\text{مثال 1 حل } x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا المستقيم  $\Delta: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين  $M$  و  $M'$  أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

$$\text{على التوالي هما } \frac{\pi}{3} \text{ و } \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

بما أن  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  بحيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي الأفاصل المنحنية

للنقطة  $M$  و  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  بحيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي الأفاصل

المنحنية للنقطة  $M'$  فإننا نستنتج أن

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

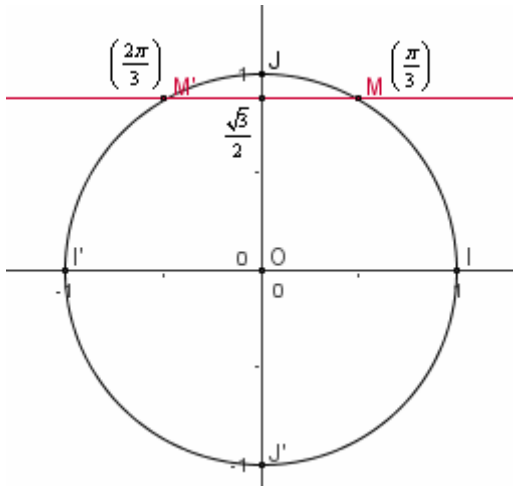
$$\text{إذن } S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{مثال 2 حل } x \in [-2\pi; 3\pi] \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال  $[-2\pi; 3\pi]$





$$-2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{أو} \quad -2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{فان}$$

$$-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{8}{6} \quad \text{تكافئ} \quad -2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا}$$

$$k = 1 \quad \text{أو} \quad k = 0 \quad \text{أو} \quad k = -1 \quad \text{تكافئ}$$

$$x = -\frac{5\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$-\frac{8}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \quad \text{تكافئ} \quad -2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا} \quad \text{لدينا}$$

$$k = 1 \quad \text{أو} \quad k = 0 \quad \text{أو} \quad k = -1 \quad \text{تكافئ}$$

$$x = -\frac{4\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{8\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right\} \quad \text{إذن}$$

**خلاصة** المعادلة  $\sin x = a$  لا تقبل حلا إذا كان  $a < -1 \vee a > 1$

$$k \in \mathbb{Z} / \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 1$$

$$k \in \mathbb{Z} / \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = -1$$

إذا كان  $-1 < a < 1$  فان يوجد عنصر  $\alpha$  من  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  حيث  $\sin \alpha = a$

حلول المعادلة  $\sin x = a$  في  $\mathbb{R}$  هي  $x = \alpha + 2k\pi$  أو  $x = \pi - \alpha + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \quad \text{تمرين حل المعادلات}$$

$$x \in ]-\pi; 2\pi] \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

**الحل**

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \quad \text{نحل}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad \text{تكافئ} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x)$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad -x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad x = \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2(-k)\pi \quad \text{حيث}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2(-k)\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in ]-\pi; 2\pi] \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{نحل}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{تكافئ} \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$\text{تكافئ } 2x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \text{ أو } 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{تكافئ } x = \frac{17\pi}{24} + k\pi \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

و حيث أن  $x \in ]-\pi; 2\pi]$  فان

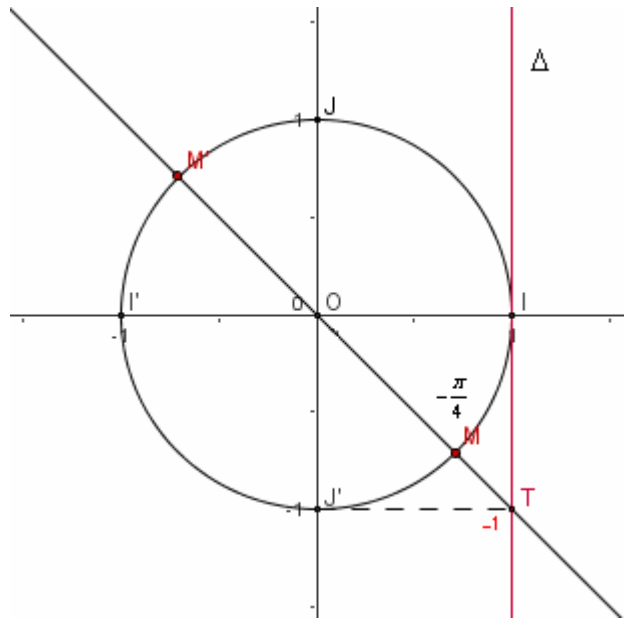
$$\text{من أجل } x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ لدينا } -\pi < \frac{\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi \text{ أي } -\frac{25}{24} < k \leq \frac{47}{24} \text{ ومنه } k = -1 \text{ أو } k = 0 \text{ أو } k = 1$$

$$\text{إذن } x = \frac{\pi}{24} + \pi = \frac{25\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} - \pi = -\frac{23\pi}{24}$$

$$\text{من أجل } x = \frac{17\pi}{24} + k\pi \text{ لدينا } -\pi < \frac{17\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi \text{ ومنه } -\frac{41}{24} < k \leq \frac{31}{24} \text{ ومنه } k = -1 \text{ أو } k = 0 \text{ أو } k = 1$$

$$\text{إذن } x = \frac{17\pi}{24} + \pi = \frac{41\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{17\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{17\pi}{24} - \pi = -\frac{7\pi}{24}$$

$$\text{ومنه } S = \left\{ -\frac{23\pi}{24}; -\frac{7\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{41\pi}{24} \right\}$$



### -3 المعادلة $\tan x = a$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{حل المعادلة } \tan x = -1$$

نعتبر  $\Delta$  المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ،  
نأخذ النقطة T من  $\Delta$  حيث  $-1$  أفصول T في المحور  $\Delta$

المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C)

$$\text{في النقطتين } M \text{ و } M' \text{ نعلم أن } \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

و بالتالي  $-\frac{\pi}{4}$  أفصول منحنى للنقطة M

$$\text{وبما أن } \tan(x + k\pi) = \tan x \text{ لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{فان حلول المعادلة هي } x = \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن } S = \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**خاصة**

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{حيث } \tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \text{ حل للمعادلة } \tan x = a \text{ في}$$

تمرين حل المعادلتين

$$x \in [0; 3\pi] \quad \tan 2x = \sqrt{3}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$$

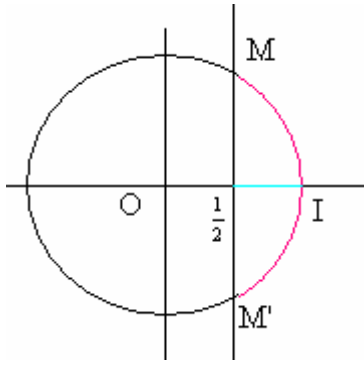
### -II المراجعات المثلثية

**مثال 1**

$$\text{حل } x \in ]-\pi; \pi] \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{نحل أولا المعادلة } \cos x = \frac{1}{2} \quad x \in ]-\pi; \pi]$$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على

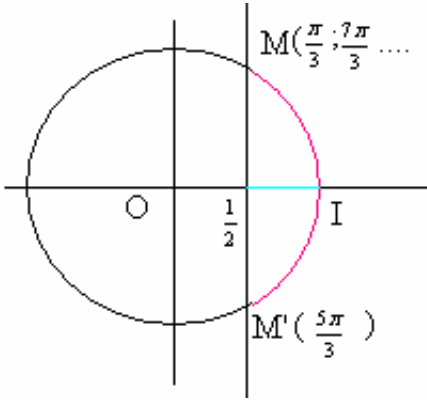


$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} \text{ تكافئ } x \in ]-\pi; \pi[ \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

لنكن  $M \left( \frac{\pi}{3} \right)$  و  $M' \left( -\frac{\pi}{3} \right)$  نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى القوس  $\widehat{M'IM}$  في  $]-\pi; \pi[$

$$S = \left[ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$



$$x \in [0; 3\pi[ \quad \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ حل **مثال 2**}$$

$$x \in [0; 3\pi[ \quad \cos x = \frac{1}{2} \text{ نحل أولا المعادلة}$$

$$x \in [0; 3\pi[ \quad \cos x = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{7\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{7\pi}{3}$  أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر  $\frac{5\pi}{3}$  أفصول منحني للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C)

التي تنتمي إلى القوس  $\widehat{M'IM}$  في  $[0; 3\pi[$

$$S = \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$

**مثال 3**

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x \geq \sqrt{3} \text{ حل}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x = \sqrt{3} \text{ نحل المعادلة}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x = \sqrt{3} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{4\pi}{3}$$

نعتبر  $\frac{\pi}{3}$  أفصول منحني للنقطة A

و  $\frac{4\pi}{3}$  أفصول منحني للنقطة B

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية

للنقط (C) التي تنتمي إلى اتحاد القوسين  $\widehat{AJ}$  و  $\widehat{BJ'}$

في  $[0; 2\pi]$

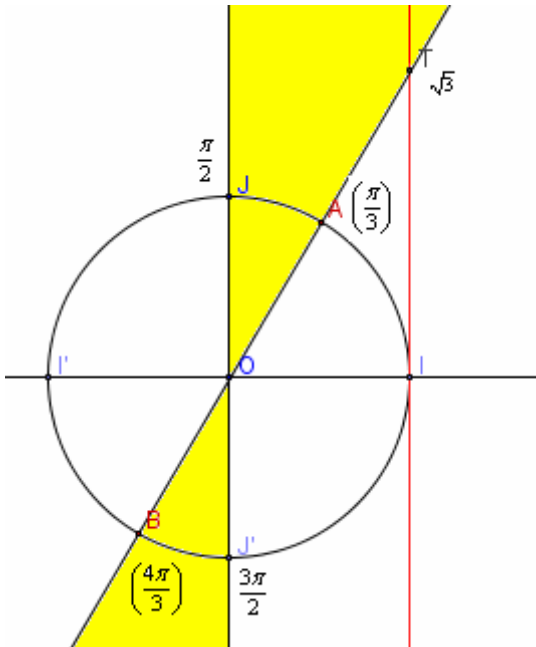
$$S = \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$

**تمرين**

$$x \in ]-\pi; \pi] \quad \sin x > \frac{-1}{2} \text{ حل}$$

$$x \in ]0; 4\pi] \quad \sin x > \frac{-1}{2}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x < 1$$



## مراجحات تؤول في حلها الى مراجحات أساسية

### تمرين

حل

$$x \in [-\pi; \pi] \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$x \in [0; \pi] \quad \tan 3x > \sqrt{3}$$

$$x \in ]-\pi; \pi] \quad 4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

$$x \in ]-\pi; \pi] \quad \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$$

### III- الزوايا المحيطية - الرباعيات الدائرية

#### 1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

#### 2- خاصيات

##### نشاط 1

لتكن (C) دائرة مركزها O نعتبر A و B نقطتين مختلفتين من (C) غير متقابلتين قطريا

و M نقطة من (C) بحيث  $\widehat{AOB}$  و  $\widehat{AMB}$  تحصران نفس القوس  $\widehat{AB}$

1- بين أن  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$  في الحالات التالية

أ/ M و O و A مستقيمة

ب/ M و O و A غير مستقيمة

يمكن اعتبار نقطة N من (C) حيث N و O و M مستقيمة

و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر (AT) المماس للدائرة (C). الزاوية  $\widehat{BAT}$  محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الزاوية

المركزية  $\widehat{AOB}$

بين أن  $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

الحل

1- أ/ M و O و A مستقيمة

المثلث OBM متساوي الساقين في الرأس O

ومنه  $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$

و حيث  $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$  لأن M و O و A مستقيمة

فان  $\widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$

اذن  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

ب/ M و O و A غير مستقيمة

N من (C) حيث N و O و M مستقيمة

حسب أ/ لدينا  $\widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$

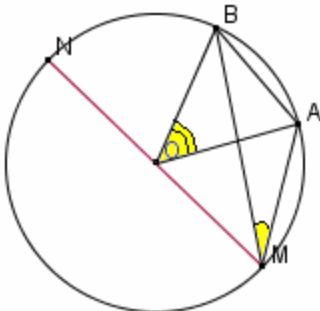
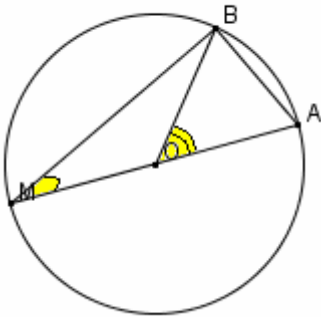
لدينا OAM مثلث متساوي الساقين في الرأس O

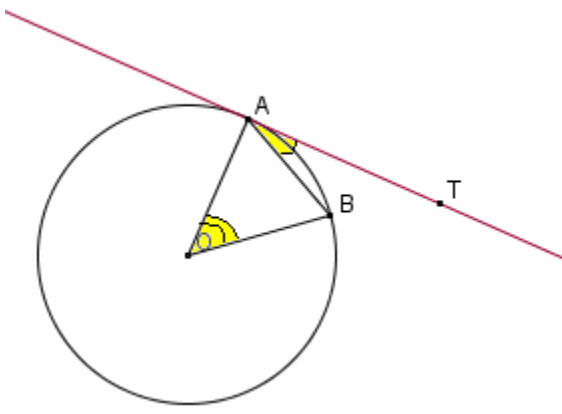
ومنه  $\widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$

لدينا  $\widehat{AOB} = \pi - (\widehat{NOB} + \widehat{AOM})$

ومنه  $\widehat{AOB} = \pi - (2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO})$

$\widehat{AOB} = 2(\widehat{AMO} - \widehat{NMB})$





$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} \text{ إذن}$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB} \text{ بين أن } /2$$

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAT} \text{ ومنه (C) المماس للدائرة (C)}$$

لدينا  $OAB$  متساوي الساقين في الرأس  $O$

$$\widehat{OAB} = \pi - 2\widehat{OAB} \text{ ومنه}$$

$$\widehat{OAB} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAT}\right) \text{ و بالتالي}$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB} \text{ إذن}$$

### خاصية 1

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

### نشاط 2

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقط مختلفة من دائرة  $(C)$  مركزها  $O$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ أو } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi \text{ بين أن}$$

### خاصية 2

$A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط من دائرة  $(C)$  و  $D$  نقط مختلفة من المستوى

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ أو } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi \text{ تكون } D \text{ من الدائرة (C) إذا و فقط إذا كان}$$

### 3- علاقات الجيب في مثلث

#### نشاط 3

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $R$  شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$

$$\text{بين أن } \frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ في الحالات التالية}$$

أ/  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$

ب/ جميع زوايا المثلث  $ABC$  حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث  $ABC$  منفرجة

#### الجواب

أ/  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = BC = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{A} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{2R}$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2R}$$

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ إذن}$$

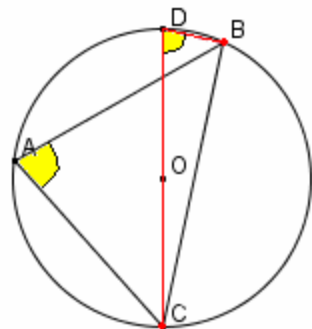
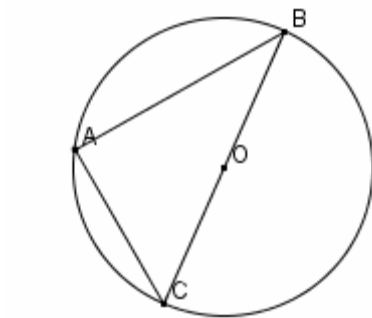
ب/ جميع زوايا المثلث  $ABC$  حادة

نعتبر  $D$  نقطة مقابلة قطريا مع  $C$

$DBC$  قائم الزاوية في  $B$

لدينا  $\hat{D} \equiv \hat{A}$  زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \text{ إذن } \frac{BC}{\sin \hat{D}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$$



لدينا  $DAC$  قائم الزاوية في  $A$

و  $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$  زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R \quad \text{إذن} \quad \sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R} \quad \text{ومنه} \quad \sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$$

بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع  $A$  و نبين  $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{إذن}$$

ج/ إحدى زوايا المثلث  $ABC$  منفرجة

لنفترض أن  $\widehat{A}$  منفرجة

نعتبر  $D$  نقطة مقابلة قطريا مع  $C$

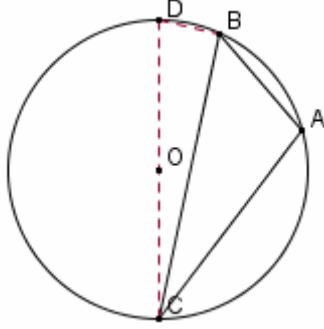
$\widehat{A}$  و  $\widehat{D}$  متكاملتان ومن  $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R \quad \text{إذن} \quad \frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R \quad \text{ومنه} \quad \sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$$

الزاويتان  $\widehat{B}$  و  $\widehat{C}$  حادتان

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{نحصل على}$$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{إذن}$$



**خاصية**

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $R$  شعاع الدائرة المحيطة به

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

**4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)**

**نشاط**

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $H$  المسقط العمودي لـ  $A$  على  $(BC)$  و  $S$  مساحته

$$1- \text{ بين أن } S = \frac{1}{2} (BC \times AC \times \sin \widehat{C})$$

2- ليكن  $r$  شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث  $ABC$  و  $O$  مركزها  
أ/ أحسب مساحة  $AOC$  بدلالة  $r$  و  $AC$

ب/ بين أن  $S = \frac{1}{2} p \times r$  حيث  $p$  محيط المثلث  $ABC$

**خاصية**

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $r$  شعاع الدائرة المحاطة به و  $S$  مساحته  $p$  محيطه

$$S = \frac{1}{2} (BC \times AC \times \sin \widehat{C})$$

$$S = \frac{1}{2} p \times r$$