

عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة - تساوي دالتين - التمثيل المبراني لدالة

1/ تعريف دالة - مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في الحالات التالية

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{5}{4-x} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{3-x}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+2x-3} \quad (c)$$

الحل

$$f(x) = \frac{5}{4-x} \quad (a)$$

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$$4-x \neq 0 \quad \text{تكافئ} \quad x \in D_f$$

$$x \neq 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{4\} \quad \text{اذن}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad (b)$$

$$2x+1 > 0 \quad \text{تكافئ} \quad x \in D_f$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{تكافئ}$$

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad \text{اذن}$$

$$; \quad f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+2x-3} \quad (c)$$

$$x^2+2x-3 \neq 0 \quad \text{تكافئ} \quad x \in D_f$$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود x^2+2x-3

$$\Delta = 4+12=16$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1 \quad \text{جرين هما} \quad x^2+2x-3$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\} \quad \text{اذن}$$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي f اذا ربطنا كل عدد من \mathbb{R} على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة x بالدالة f أو باختصار f لـ x

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f

نرمز لها بـ D_f

2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين f و g لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$$f(x) = x - 1 ; \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} ; \quad g(x) = \frac{2}{x(x + 2)} \quad (b)$$

/a لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ومنه $D_f \neq D_g$ إذن $f \neq g$

/b لدينا $D_g = D_f = \mathbb{R}^* - \{2\}$

لتكن $x \in \mathbb{R}^* - \{2\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x + 2 - x}{x(x + 2)} = \frac{2}{x(x + 2)} = g(x)$$

إذن $f = g$

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي
تكون f و g متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D
 $f(x) = g(x)$

3- التمثيل المبياني لدالة نشاط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$$

أ- حدد D_f

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصولييهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

د - أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

الحل

أ- نحدد D_f

$$x \in D_f \text{ تكافئ } |x| - 2 \neq 0$$

$$|x| \neq 2 \text{ تكافئ}$$

$$x \neq 2 \text{ أو } x \neq -2 \text{ تكافئ}$$

$$\text{إذن } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

ب - نحدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصولييهما على التوالي 0 و 3

$$\text{لدينا } f(0) = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ ومنه } A(0;2) \in C_f$$

$$\text{لدينا } f(3) = \frac{9-4}{3-2} = 5 \text{ ومنه } B(3;5) \in C_f$$

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

$$\text{لدينا } 2 \notin \mathbb{R} - \{-2; 2\} \text{ ومنه } C(2;0) \in C_f$$

$$\text{لدينا } f(-4) = \frac{16-4}{4-2} = 6 \text{ ومنه } D(-4;6) \in C_f$$

$$\text{لدينا } f(4) = \frac{16-4}{4-2} = 6 \text{ ومنه } E(4;-6) \notin C_f$$

د - نكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة

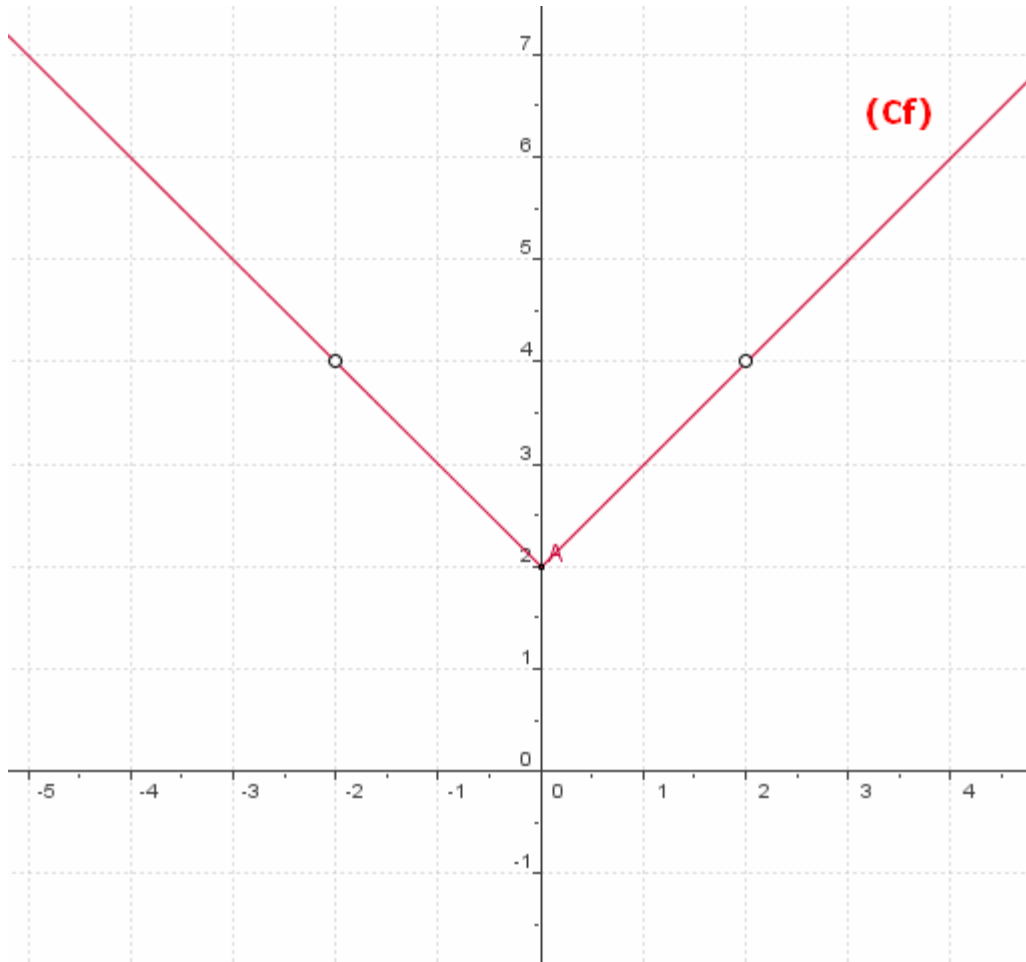
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad \text{فان } x \in [0; 2[\cup]2; +\infty[\text{ لدينا إذا كان}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{-x-2} = -x+2 \quad \text{فان } x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0] \text{ إذا كان}$$

ننشئ المنحنى C_f

معادلة جزء C_f على $[0; 2[\cup]2; +\infty[$ هي $y = x+2$ و منه C_f نضع مستقيم أصله النقطة $A(0; 2)$ محروم من النقطة ذات الأضلاع 2

معادلة جزء C_f على $] -\infty; -2[\cup] -2; 0]$ هي $y = -x+2$ و منه C_f نضع مستقيم أصله النقطة $A(0; 2)$ محروم من النقطة ذات الأضلاع - 2



تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .
التمثيل المبياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x; f(x))$ حيث $x \in D_f$ نرسم

$$C_f = \{M(x; f(x)) / x \in D_f\} \quad \text{لها بالرمز } C_f$$

ملاحظة

$M(x; y) \in C_f$ تكافئ $y = f(x)$ و $x \in D_f$
العلاقة $y = f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها
 نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :
 * لكل x من D_f $-x \in D_f$
 * لكل x من D_f $f(-x) = f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (b) \quad ; \quad f(x) = |x| - \frac{1}{x^2} \quad (a)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \leq x < 4 \\ f(x) = -2x & x < 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$f(x) = |x| - \frac{1}{x^2} \quad /a$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$-x \in \mathbb{R}^* \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لدينا لكل}$$

$$x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لتكن}$$

$$f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

إذن f دالة زوجية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad /b$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

ومنه $f(-1) \neq f(1)$ f دالة غير زوجية

$$\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \leq x < 4 \\ f(x) = -2x & x < 0 \end{cases} \quad /c$$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup [0; 4[=]-\infty; 4[$$

نلاحظ أن $-6 \in D_f$ و $6 \notin D_f$ إذن f دالة غير زوجية

ب التمثيل المبراني لدالة زوجية

 f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ لتكن $M(x; f(x))$ من C_f و $M'(-x; f(x))$ مماثلتها بالنسبة لمحور الأرتاب .ومنه $M'(-x; f(x))$ و حيث أن f زوجية فان $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$ ومنه $M'(-x; f(-x))$ و بالتالي $M' \in C_f$ إذن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

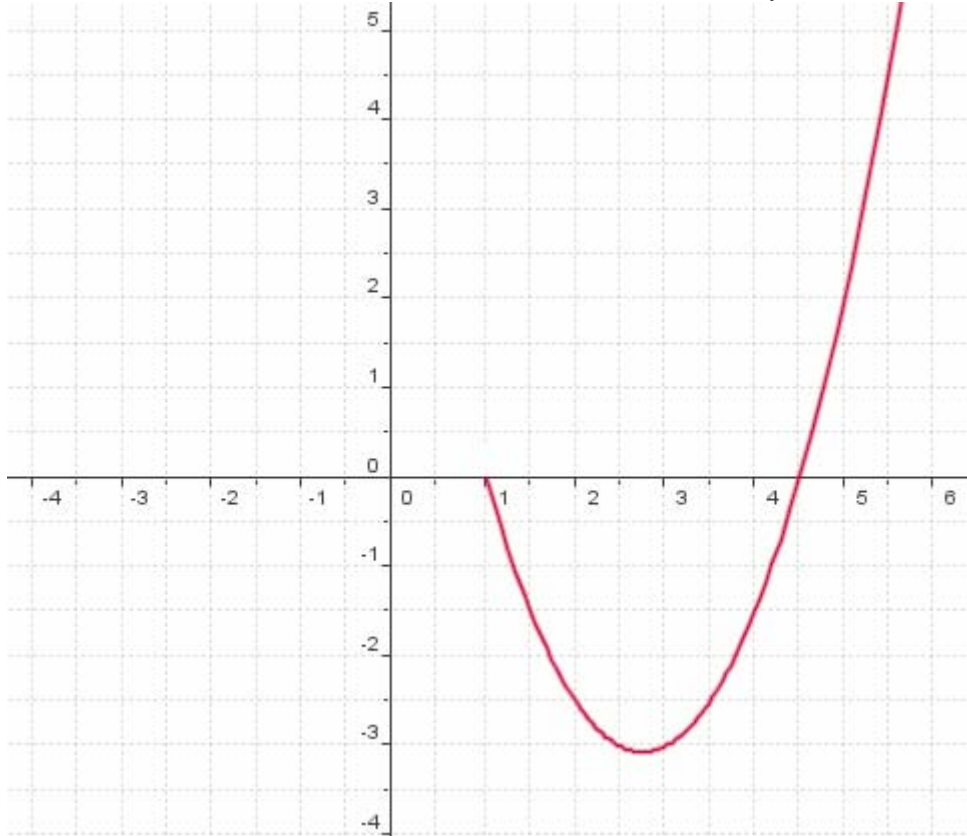
العكس

بين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب فان f دالة زوجية

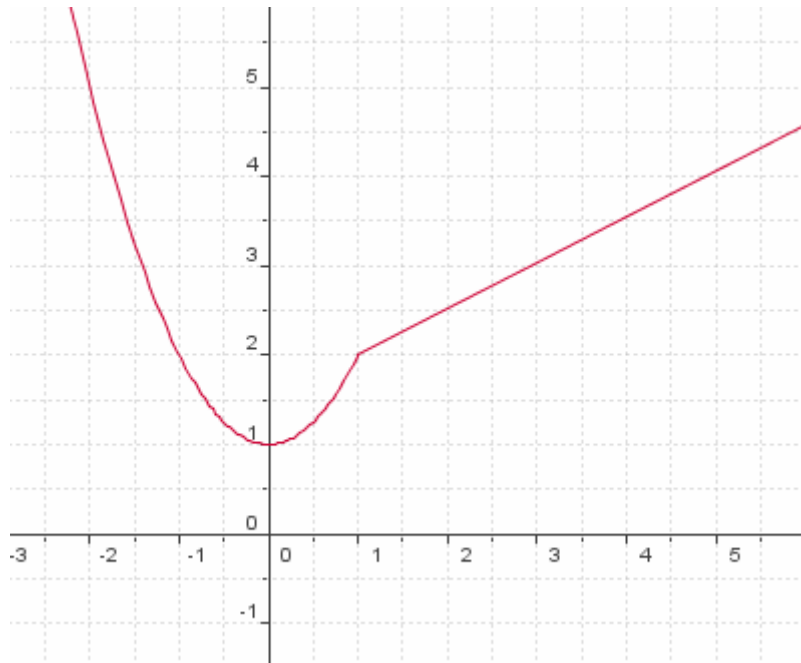
خاصة

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأرتاب محور تماثل للمنحنى C_f

1- f دالة زوجية أتمم المنحنى C_f



2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية
2- دالة فردية
 أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$* \text{ لكل } x \text{ من } D_f \quad -x \in D_f$$

$$* \text{ لكل } x \text{ من } D_f \quad f(-x) = -f(x)$$

هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (a)$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -2x - 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad /a$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}^*$ $-x \in \mathbb{R}^*$
لتكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad /b$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

ومنه $f(-1) \neq -f(1)$ إذن f دالة غير فردية

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -2x - 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad /c$$

$$D_f = [-2; 0[\cup]0; 2] = [-2; 2]$$

لدينا لكل $x \in [-2; 2]$ و $-x \in [-2; 2]$ إذا كان $x \in]0; 2]$ فان $-x \in [-2; 0[$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{ومنه} \quad f(-x) = -2(-x) - 1 = 2x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -2x + 1$$

إذا كان $x \in [-2; 0[$ فان $-x \in]0; 2]$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{ومنه} \quad f(-x) = -2(-x) + 1 = 2x + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -2x - 1$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{للكل} \quad x \in [-2; 2]$$

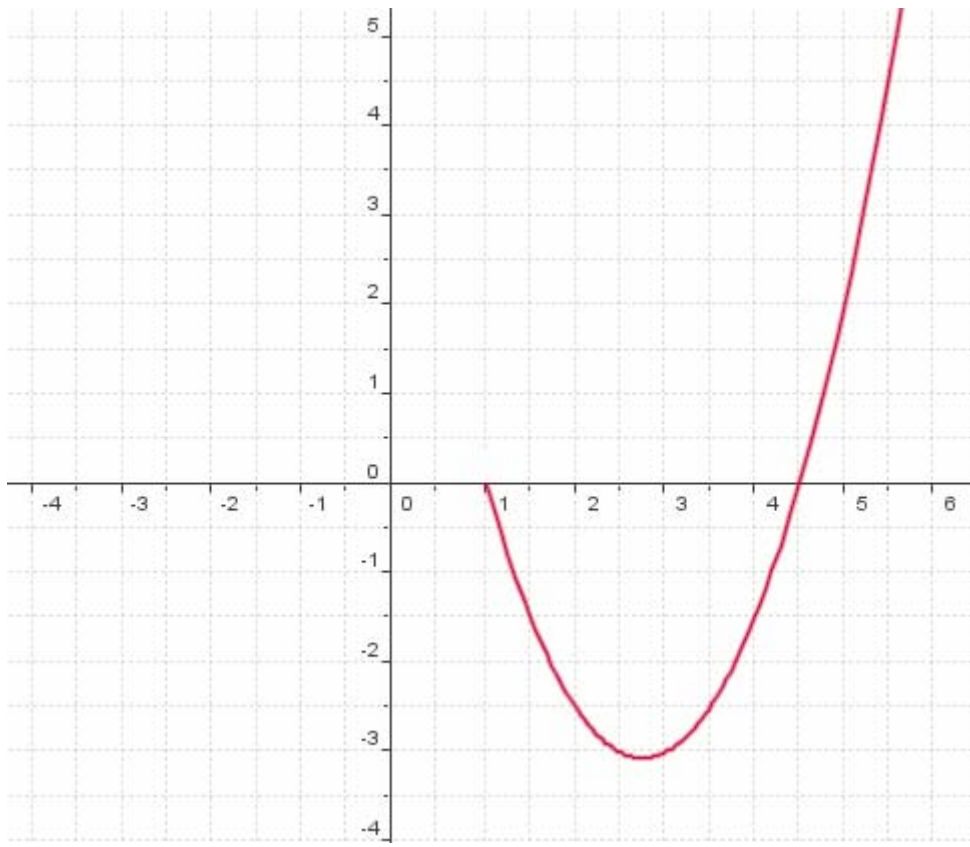
إذن f دالة فرديةب-التمثيل المبراني لدالة فردية

خاصة

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$
تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمارين

 f دالة فردية أتمم المنحنى C_f



تمرين

$$f(x) = \frac{|x| + x^2}{x}$$

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث

حدد D_f وبين أن f فردية ثم أنشئ C_f

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

III- تغيرات دالة

1- منحنى تغيرات دالة

تعريف

- لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f
- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فان $f(x_1) \leq f(x_2)$
 - تكون f تزايدية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فان $f(x_1) < f(x_2)$
 - تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فان $f(x_1) \geq f(x_2)$
 - تكون f تناقصية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فان $f(x_1) > f(x_2)$

مثال

أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = -2x + 1$

ليكن a و b من \mathbb{R} حيث $a < b$

ومنه $-2a > -2b$ و بالتالي $-2a + 1 > -2b + 1$ فان $f(a) > f(b)$

إذن f تناقصية قطعاً

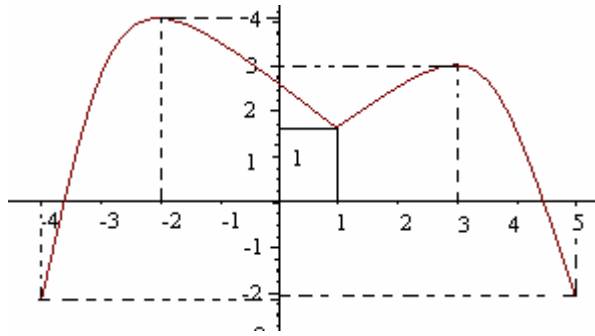
تمرين

نعتبر $f(x) = |x - 2|$

أدرس منحنى تغيرات f على كل من $]-\infty; 2]$ و $]2; +\infty[$

أنشئ C_f

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة f على المجال $[-4;5]$ حدد تغيرات f



2- الدالة الرتبة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f .
نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما تزايدية على I و إما تناقصية على I .

ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتبة f على مجال I يعني تجزيء I إلى مجالات تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

3- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من D_f
العدد $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2 .

مثال نعتبر $f(x) = x^2 - 3x$

أحسب معدل تغيرات f بين 2 و -1

ب- معدل التغير و الرتبة

بتوظيف التعريف نحصل على

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$
- تكون f تزايدية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$
- تكون f تناقصية قطعاً على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

تمرين

نعتبر $f(x) = x^2 - 4x - 1$

أدرس رتبة f على كل من المجالين $]-\infty; 2]$; $]2; +\infty[$

و أعط جدول تغيرات f

الجواب

ليكن a و b من \mathbb{R} حيث $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a^2 - 4a - 1 - b^2 + 4b + 1}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b) - 4(a + b)}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b - 4)}{a - b} = a + b - 4$$

إذا كان a و b من $]2; +\infty[$ فإن $a > 2$ و $b > 2$ ومنه $a + b > 4$ أي $a + b - 4 > 0$

إذن f تزايدية قطعاً على $]-2; +\infty[$
 إذا كان a و b من $]-\infty; 2]$ فإن $a \leq 2$ و $b \leq 2$ ومنه $a+b \leq 4$ أي $a+b-4 \leq 0$
 إذن f تناقصية على $]-\infty; 2]$
 جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘		↗
		-1	

تمرين

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

نعتبر f أدرس رتبة

4- الرتبة وزوجية دالة

أ- خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل J بالنسبة لـ 0 ($J = \{-x/x \in I\}$)
 - إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على J .
 - إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على J .

البرهان

لتكن f دالة زوجية و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من J
 ومنه يوجد x_1' و x_2' من I حيث $x_1' = -x_1$ و $x_2' = -x_2$

$$\frac{f(x_2') - f(x_1')}{x_2' - x_1'} = \frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{-x_2 + x_1} = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

 إذن تغيرات f على I عكس تغيرات f على J

أ- خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل J بالنسبة لـ 0 ($J = \{-x/x \in I\}$)
 - إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على J .
 - إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على J .

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

تمرين

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f
 2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

VI- القيمة القصوى - القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي
 - نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$

$$f(x) < f(a)$$

 - نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$

$$f(x) > f(a)$$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطارييف لدالة f

تمرين نعتبر $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- 1- أدرس زوجية f أحسب $f(1)$
- 2- بين أن لكل x من $]0; +\infty[$ $f(x) \geq 2$
- 3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى ل f إذا وجد

الجواب

1- ندرس زوجية f

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

إذن f فردية

$$\text{حساب } f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

- 2- نبين أن لكل x من $]0; +\infty[$ $f(x) \geq 2$
ليكن x من $]0; +\infty[$

$$f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن $x > 0$ و $(x-1)^2 \geq 0$ فإن $f(x) \geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى ل f

من $1/2$ و $1/2$ نستنتج أن لكل x من $]0; +\infty[$ $f(x) \geq f(1)$
اذن f تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن $x \in]-\infty; 0[$ و منه $-x \in]0; +\infty[$ مما سبب نستنتج أن $f(-x) \geq f(1)$
و حيث f فردية فإن $f(x) \leq f(1)$ و بالتالي $f(x) \leq -f(1)$ أي $f(x) \leq f(-1)$
اذن f تقبل قيمة قصوى عند -1

خاصة

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a < b < c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي
إذا كانت f تزايدية على $[a; b]$ و تناقصية على $[b; c]$ فإن f
تقبل قيمة قصوى عند b
إذا كانت f تناقصية على $[a; b]$ و تزايدية على $[b; c]$ فإن f
تقبل قيمة دنيا عند b

V- دراسة تغيرات دالة - دراسة وضعية منحنين

دراسة تغيرات دالة f يعني

- تحديد D_f

- دراسة رتبة f وتلخيصها في جدول التغيرات

دراسة وضع منحنين مبياناً

ليكن C_f و C_g منحنين للدالتين f و g على التوالي

يكون $f(x) > g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f فوق C_g في المجال I

يكون $f(x) < g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f تحت C_g في المجال I

حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال I هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنين C_f تحت C_g في المجال I

تمرين

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x-1} \text{ حيث } f \text{ أدرس تغيرات}$$

تمرين

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ حيث } f \text{ أدرس تغيرات}$$

حدد مطايف الدالة f

تمارين و حلول

تمرين 1

نعبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x) = x|x| - 4x$

1 - أدرس زوجية الدالة f

2 - أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4$$

ب) حدد رتبة f على كل من $[0; 2[$ و $[2; +\infty[$ واستنتج رتبة f على كل من $]-\infty; -2[$ و $]-2; 0[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطايف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x$

$$f(x) = x|x| - 4x$$

1 - ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f = \mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x|-x| + 4x = -(x|x| - 4x) = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4 \quad : [0; +\infty[\text{ من } y \text{ و } x \text{ مختلفين}$$

لدينا لكل x من $[0; +\infty[: f(x) = x^2 - 4x$

ليكن x و y من $[0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x^2 - 4x - y^2 + 4y}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y) - 4(x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y - 4)}{x - y} \\ &= x + y - 4 \end{aligned}$$

ب) نحدد رتبة f على كل من $[0; 2[$ و $[2; +\infty[$ و نستنتج رتبة f على كل من $]-2; 0[$ و $]-\infty; -2[$

* ليكن x و y من $[0; 2[$ حيث $x \neq y$ ومنه $0 \leq x < 2$ و $0 \leq y < 2$

و بالتالي $0 \leq x + y < 4$ أي $-4 \leq x + y - 4 < 0$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \text{ ومنه}$$

إذن f تناقصية قطعاً على $[0;2[$ وحيث أن f فردية فإن f تناقصية قطعاً على $]-2;0]$
* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x > 2$ و $y > 2$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \text{ وبالتالي } x+y-4 > 0 \text{ أي}$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعاً على $]-\infty;-2[$
(ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f		4	-4	

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2[$ و تناقصية على $]-2;2]$ فإن f تقبل قيمة قصوى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x| - 4x = -2x$

$$x|x| - 2x = 0 \text{ تكافئ } x|x| - 4x = -2x$$

$$\text{تكافئ } x(|x| - 2) = 0$$

$$\text{تكافئ } x = 0 \text{ أو } |x| = 2$$

$$\text{تكافئ } x = 0 \text{ أو } x = 2 \text{ أو } x = -2$$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصل 0 و 2 و -2

تمرين 2

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1} \text{ نعتبر } f \text{ دالة عددية معرفة بـ}$$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحنى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \text{ يكافئ } x^2 - 1 \neq 0$$

$$\text{تكافئ } x^2 \neq 1$$

$$\text{تكافئ } x \neq 1 \text{ و } x \neq -1$$

$$\text{إذن } D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$: $\mathbb{R} - \{-1;1\}$
 لتكن $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

إذن دالة f فردية

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \quad D_f \text{ من } b \text{ و } a \text{ مختلفين}$$

ليكن a و b من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ حيث $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{-a}{a^2 - 1} - \frac{-b}{b^2 - 1}}{a - b} = \frac{-a(b^2 - 1) + b(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \times \frac{1}{a - b}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-ab^2 + a + ba^2 - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab(a - b) + a - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a - b)(ab + 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

3- نحدد منحنى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ ونستنتج منحنى تغيراتها على $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \quad \mathbb{R} - \{-1;1\} \text{ من } b \text{ و } a \text{ مختلفين}$$

ليكن a و b من $]0;1[$

ومنه $0 \leq ab < 1$ et $0 \leq a^2 < 1$ et $0 \leq b^2 < 1$ وبالتالي $0 \leq a < 1$; $0 \leq b < 1$

ومنه $1 \leq ab + 1 < 2$ et $-1 \leq a^2 - 1 < 0$ et $-1 \leq b^2 - 1 < 0$

$$\text{إذن } \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0 \text{ ومنه } f \text{ تزايدية على }]0;1[$$

وحيث أن f فردية فإن f تزايدية على $]1;+\infty[$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $ab > 1$ et $0 \leq a^2 > 1$ et $b^2 > 1$ وبالتالي $a > 1$; $b > 1$

ومنه $ab + 1 > 2$ et $a^2 - 1 > 0$ et $b^2 - 1 > 0$

$$\text{إذن } \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0 \text{ ومنه } f \text{ تزايدية على }]1;+\infty[$$

وحيث أن f فردية فإن f تزايدية على $]1;+\infty[$

4- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↗			↗	