

الإحصاء

I - مصطلحات و تعاريف 1- الساكنة الإحصائية:

الساكنة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع لدراسة إحصائية وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.

ميزة إحصائية أو المتغير الإحصائي:

ميزة إحصائية هي الخاصية موضوع الدرس، فهي كمية أو كيفية.

☞ **ميزة كمية** هي التي تترجم عدديا .
أمثلة القامة- المحصول الفلاحي- استهلاك الماء.....

☞ **ميزة كيفية** هي التي لا تترجم إلى عدد .

أمثلة فصيلة الدم - الجنس.....

ملاحظة: الميزة الكمية فهي متقطعة فتأخذ قيما أو متصلة فيعبر عنها بالأصناف.

2- الحصص و التردد المتراكم - التردد و التردد المتراكم

الحصص:

الحصص n_i الموافق لقيمة الميزة x_i (أو الموافق الصنف I_i) هو العدد المرات التي تتكرر فيها القيمة x_i (أو هو عدد القيم التي تنتمي إلى الصنف I_i)

الحصص المتراكم:

الحصص المتراكم الموافق لقيمة الميزة x_i (أو الموافق الصنف I_i) هو العدد N_i

حيث $N_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$

حيث n_1 و n_2 و n_3 هي حصص القيم التي أصغر أو تساوي x_i

الحصص الإجمالي:

الحصص الإجمالي N هو مجموع جميع الحصص

التردد:

التردد f_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هو العدد $f_i = \frac{n_i}{N}$

ملاحظة

مجموع جميع الترددات يساوي 1 **التردد المتراكم** F_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هو $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$

النسبة المئوية:

النسبة المئوية P_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هي $P_i = 100f_i$ حيث f_i التردد الموافق ل x_i أو I_i

- مجموعة الأزواج $(x_i; n_i)$ تسمى متسلسلة إحصائية حيث n_i الحصص الموافق للقيمة x_i

أ- ميزة كمية متقطعة

مثال 2

نعتبر الكشف التالي الذي يعطينا معطيات إحصائية حول عدد الغرف في منازل أحد الأحياء

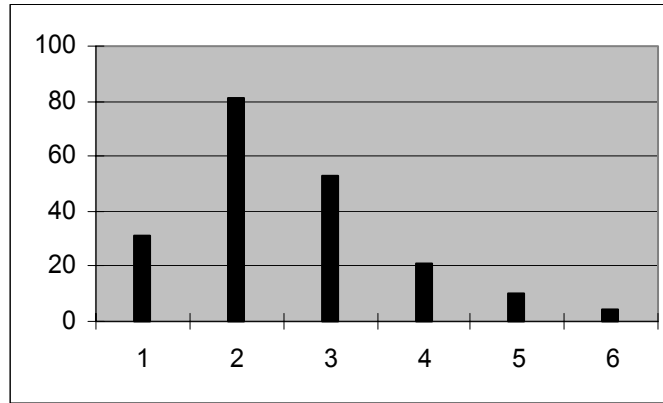
3	4	2	2	3	1	5	2	4	3
5	6	2	3	4	2	2	2	3	4
2	2	2	1	3	3	3	4	2	1
2	1	2	2	3	4	5	2	3	1
3	3	2	2	2	5	6	1	2	2
3	3	2	2	1	2	3	2	2	2
4	3	1	3	3	2	2	1	5	4
3	3	4	4	2	2	2	2	1	2
4	2	2	1	2	3	3	3	3	2
3	3	3	2	2	2	2	1	1	6
5	3	1	3	3	3	2	1	5	4
2	3	2	4	3	2	4	2	1	2
4	1	2	1	2	3	2	3	3	3
3	1	3	2	2	2	2	1	1	4
2	2	2	1	3	3	3	4	2	1
1	2	2	2	3	2	5	2	3	1
3	3	2	2	2	5	6	1	2	2
3	2	2	1	1	2	3	2	2	2
3	2	1	4	3	2	2	1	5	4
2	3	4	4	2	3	2	3	1	2

يعطينا هذا الكشف معلومات تهم ساكنة إحصائية تتكون من 200 وحدة إحصائية. إذن الحصص الإجمالي هو 200 الميزة المدروسة هي عدد الغرف (ميزة كمية متقطعة)

نلاحظ أن العدد 1 يتكرر 31 مرة نقول إن 31 هو الحصيص الموافقللقيمة 1 انطلاقا من هذا الكشف يمكن تكوين جدول إحصائي و ذلك بتنظيم المعلومات على الشكل التالي : يحتوي على قيم x_i مرتبة ترتيبا تزايديا و حصيصات موافقة لها، و ترددات موافق لها.

قيمة الميزة x_i	1	2	3	4	5	6
الحصيص n_i	31	81	53	21	10	4
الحصيص المتراكم N_i	31	112	165	186	196	200
التردد f_i	0,155	0,405	0,265	0,105	0,05	0,02
التردد المتراكم F_i	0,155	0,56	0,825	0,93	0,98	1

رغم ما تمتاز به الجداول من الدقة فإنها لا تعطينا فكرة واضحة و سريعة عن الظاهرة التي نحن بصدد دراستها. لذا نعلم إلى تمثيل الجداول الإحصائية مبيانيا التمثيل المبياني للحصيص



مخطط عصوي للحصيص

بنفس الطريقة نمثل الحصيص المتراكم و التردد و التردد المتراكم



ب- ميزة كمية متصلة

مثال 1

الكشف التالي يتضمن معطيات إحصائية تتعلق بثمن نفس الكمية من منتج فلاحى (بالدرهم) في نقط مختلفة للبيع.

45	80,5	46	41,5	41	51	20	40	84	43
41	32,5	54	43	21,5	69	61,5	37,5	82	67
48	84	56	70,5	58	25	44	70	32,5	43
64	68	51	75	43	81	50	48	86	60,5
29	48	59	74	48	30,5	56	58	49,5	33,5
34	53	53	42	28	59	67	72	77	45
60	55,5	33	63	44,5	34,5	38,5	56,5	44	51
53	78,5	38	38	25,5	62,5	77,5	57	67	47
34	55	67	69	31	37	44	47	51,5	58
55	49	34	44	37,5	74	56	37	72,5	67

يعطينا هذا الكشف معلومات عن ساكنة إحصائية تتكون من 100 وحدة إحصائية . الميزة المدروسة ثمن المنتج الفلاحي

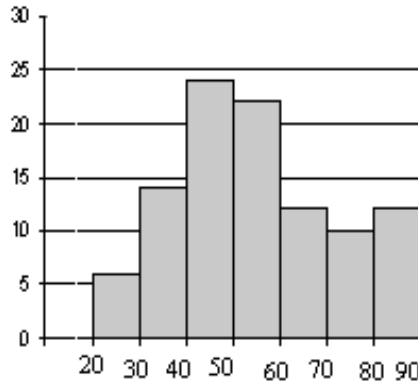
نلاحظ أنه ليس هناك تكرار كبير للمعلومات لتبسيط الدراسة نعمل إلى تجميع المعلومات في مجالات لها نفس السعة تسمى **أصناف**. وبذل دراسة جميع قيم الميزة نختار في كل صنف قيمة وحيدة هي مركز الصنف و تسمى **قيمة الصنف**.

$$\text{قيمة الصنف } [a;b] \text{ هي } \frac{a+b}{2}$$

في المثال الذي لدينا يمكن تجميع المعلومات في مجالات سعته 10 فنحصل مثلا على الصنف $[20;30]$ قيمة هذا الصنف هي 25 نقول في هذه الحالة ان الميزة المدروسة **ميزة كمية متصلة**

التردد f_i	الحصيص المتراكم N_i	الحصيص n_i	قيمة الصنف x_i	الصنف $[a_{i-1};a_i[$
0,06	6	6	25	$[20;30[$
0,14	20	14	35	$[30;40[$
0,24	44	24	45	$[40;50[$
0,22	66	22	55	$[50;60[$
0,12	78	12	65	$[60;70[$
0,10	88	10	75	$[70;80[$
0,12	100	12	85	$[80;90[$

التمثيل البياني للحصيص



مدراج للحصيص

بالمثل نمثل التردد و الحصيص المتراكم

صفة عامة

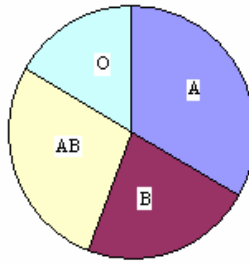
عندما تأخذ الميزة الإحصائية عددا كبيرا من القيم فإننا نغطي مجموع هذه القيم بمجالات تسمى أصنافا $I_1 = [a_0; a_1[$ $I_2 = [a_1; a_2[$ $I_n = [a_{n-1}; a_n[$ و يرمز له بـ I_i الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذ في الميزة قيمة تنتمي إلى الصنف n_i مجموعة الأزواج $(I_i; n_i)$ تسمى متسلسلة معبر عنها بالأصناف.

ج - ميزة كمية

مثال 3 نعتبر الكشف التالي الذي يحتوي على فصيلة الدم لـ 180 فردا كما يلي 60 فرد الفصيلة A و 40 فصيلة B و 50 فصيلة AB و 30 فصيلة O الجدول الإحصائي

الميزة	A	B	AB	O
الحصيص	60	40	50	30
α_i	120°	80°	100°	60°

$$\alpha_i = n_i \frac{360}{180}$$



II- وسطيات الوضع

1- المنوال

تعريف

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة أو صنف أو نوع له أكبر حصيص.

أمثلة

في المثال 1 السابق : 2 منوال للمتسلسلة الإحصائية

في المثال 2 السابق : [40; 50] منوال للمتسلسلة الإحصائية

في المثال 3 السابق : الفصلة A منوال للمتسلسلة الإحصائية

2- القيمة الوسطية

أ- تعريف

لتكن متسلسلة ذات ميزة كمية و M عدد حقيقي يحقق الخاصية التالية : نصف وحدات الساكنة الإحصائية على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أصغر من أو تساوي M و نصف وحدات الساكنة الإحصائية على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أكبر من أو تساوي M

مثال

الجدول التالي يعطي النقط التي حصل عليها تلاميذ أحد الأقسام

16	12	11	10	8	7	2	النقطة
1	2	5	4	5	10	3	الحصيص
30	29	27	22	18	13	3	الحصيص المتراكم

نلاحظ أكثر من نصف عدد التلاميذ حصلوا على نقطة أصغر من أو تساوي 8. و أكثر من نصف عدد التلاميذ حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 8 إذن العدد 8 قيمة وسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

ب- مبرهنة

أصغر قيم الميزة التي حصيها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي هي قيمة وسطية في متسلسلة غير معبر عنها بالأصناف.

مثال

في المثال السابق لدينا $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$ و أصغر قيم الميزة التي حصيها المتراكم أكبر من أو يساوي 15 هي 8

إذن العدد 8 قيمة وسطية

ج- مبرهنة

لتكن $([a_{i-1}; a_i]; n_i)$ متسلسلة معبر عنها بالأصناف و N_i الحصيص المتراكم الموافق لصنف

$[a_{i-1}; a_i]$

القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية هي القيمة M

$$M = (a_k - a_{k-1}) \frac{\frac{N}{2} - N_{k-1}}{n_k} + a_{k-1} \quad \text{ب المحددة}$$

حيث k هو العدد الصحيح الطبيعي الذي يحقق $N_{k-1} \leq \frac{N}{2} < N_k$ (نأخذ $N_0 = 0$)

ملاحظة N_k يوافق $[a_{k-1}, a_k[$ و n_k يوافق $[a_{k-1}, a_k[$

الصف [a _{i-1} ; a _i [الحصيص n _i	الحصيص المتراكم N _i
[20; 30[6	6
[30; 40[14	20
[40; 50[24	44
[50; 60[22	66
[60; 70[12	78
[70; 80[10	88
[80; 90[12	100

$$(N_k = 66 \quad N_{k-1} = 44)$$

$$\text{لدينا } \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ و } 44 \leq 50 < 66$$

الحصيص المتراكم 66 موافق لصف [50; 60[
الحصيص 22 موافق لصف [50; 60[

$$M = (60 - 50) \frac{50 - 44}{22} + 50 = \frac{580}{11}$$

3- المعدل الحسابي

تعريف لتكن (x₁; n₁); (x₂; n₂); (x_p; n_p) متسلسلة إحصائية حيث x_i هو قيمة الميزة (أو قيمة الصف I_i) و n_i هو الحصيص الموافق لـ x_i.
الوسط أو المعدل الحسابي هو العدد

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_p n_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p}$$

أمثلة (نأخذ الأمثلة السابقة)
خاصية

لتكن \bar{x} المعدل الحسابي لمتسلسلة حصيها الاجمالي N و \bar{x}' المعدل الحسابي لمتسلسلة أخرى حصيها الاجمالي N'

$$\frac{N\bar{x} + n'\bar{x}'}{N + N'}$$

المعدل الحسابي للمتسلسلة المكونة من تجميع المتسلسلتين هو

III – وسطيات التشتت

1- نشاط تمهيدي

يعطي الجدولان التاليان نقط 20 تلميذا في مادة الرياضيات و الفرنسية.

الرياضيات

النقطة	8	9	10	11	12	13	14	15
الحصيص	1	1	3	5	2	2	2	4

الفرنسية

النقطة	2	5	7	8	10	11	12	14	15	16	17	18	19	20
الحصيص	1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	2	1	1	1

حدد وسطيات الوضع (المنوال – القيمة الوسطية – المعدل الحسابي)
لاحظ أن لهما نفس وسطيات الوضع
أنجز مخططا عسويا لكل منهما

رغم أن لهذين المتسلسلتين نفس وسطيات الوضع إلا أنهما يختلفان جذريا. فالنقط التي حصل عليها التلاميذ في الرياضيات تتجمع حول القيمة 11 في حين نلاحظ تشتت نقط الفرنسية بين 2 و 20

يبين هذا أن وسيطات الوضع غير كافية لإعطاء نظرة كاملة على متسلسلة إحصائية ، وهذا ما يتطلب أخرى تسمى **وسيطات التشتت**

2- الانحراف المتوسط

تعريف

الانحراف المتوسط لمتسلسلة إحصائية $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ هو العدد

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$\rho = \frac{n_1 |x_1 - \bar{x}| + n_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + n_p |x_p - \bar{x}|}{N}$$

حيث \bar{x} المعدل الحسابي و N الحصيص الإجمالي.

مثال نأخذ النشاط السابق

الرياضيات

15	14	13	12	11	10	9	8	x_i النقطة
4	2	2	2	5	3	1	1	n_i الحصيص
3	2	1	0	1	2	3	4	$ x_i - \bar{x} $

$$\rho_M = \frac{4+3+6+5+0+2+4+12}{20} = 1,8$$

بالمثل بالنسبة الفرنسية نحصل $\rho_F = 4,2$ نلاحظ $\rho_M < \rho_F$ وهذا يبين أن النقط الرياضيات أقل تشتتاً من نقط الفرنسية

3- الانحراف الطرازي و المغايرة

تعريف

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$$

مغايرة متسلسلة إحصائية $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ هو العدد

الانحراف الطرازي لهذه المتسلسلة هو $\sigma = \sqrt{v}$

ملاحظة

$$v = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 *$$

* إذا كانت المتسلسلة معبراً عنها بالأصناف فنعتبر x_i قيمة الصنف.

مثال

المثال السابق

الرياضيات

15	14	13	12	11	10	9	8	x_i النقطة
4	2	2	2	5	3	1	1	n_i الحصيص
9	4	1	0	1	4	9	16	$(x_i - \bar{x})^2$

$$\sigma_M = 2\sqrt{1,1} \quad ; \quad v_M = 4,4$$