

النظـمات

* حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة).
* التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين، واستعماله في تجويبه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.

I- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- أنشطة

نعتبر في \mathbb{R}^2 المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$

هل الأزواج $(1; 2)$ و $(-1; 2)$ و $(0; \frac{1}{2})$ حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة
لتكن S مجموعة الحلول

$$S = \left\{ \left(a; \frac{3a+1}{2} \right) / a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{إذن} \quad \text{نضع } x = a \text{ ومنه } y = \frac{3a+1}{2}$$

2- تعريف

كل معادلة على شكل $ax + by + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حل المعادلة $ax + by + c = 0$ هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

تمرين

حل في \mathbb{R}^2 المعادلات $2x + y - 1 = 0$; $3x - 1 = 0$; $2y + 4 = 0$

II - النظـمات

1- أنشطة

أ- بين أن النظمة $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين

مختلفتين (التعويضية و التأليفة الخطية)

ب- بين أن النظمة $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -\frac{2}{3}x + y = -2 \end{cases}$ لا تقبل حلا

2- دراسة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ- تعريف

نسمي نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل نظمة من شكل: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a و b و a' و b' أعداد حقيقية.

ب- دراسة عامة

لنحل في \mathbb{R}^2 النظمة $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث $(a; b) \neq (0; 0)$ و $(a'; b') \neq (0; 0)$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = b'c - bc' \\ a(a'x + b'y) - a'(ax + by) = ac' - a'c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - ba')x = b'c - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

ومن هنا حل النظمة يتوقف على العدد $ab' - a'b$

العدد $ab' - a'b$ يسمى محددة النظمة نرسم له ب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

* إذا كان $ab' - a'b \neq 0$ فإن النظمة تقبل حلا وحيدا

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \quad \text{و} \quad x = \frac{b'c - bc'}{ab' - ba'}$$

$$* \text{ إذا كان } ab' - a'b = 0 \text{ فإن } \begin{cases} b'c - bc' = 0 \\ ac' - a'c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- إذا كان $ac' - a'c = 0$ و $b'c - bc' = 0$ فإن S هي مجموعة حلول المعادلة $ax + by = c$
 - إذا كان $ac' - a'c \neq 0$ أو $b'c - bc' \neq 0$ فإن $S = \emptyset$

تعريف و خاصة

نعتبر a و b و a' و b' أعداد حقيقية حيث $(a; b) \neq (0; 0)$ و $(a'; b') \neq (0; 0)$

$$* \text{ العدد } ab' - a'b \text{ يسمى محددة النظام } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ } (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ نرسم له ب } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \text{ نكتب}$$

$$* \text{ للنظمة } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ حل وحيد إذا فقط إذا كان } ab' - a'b \neq 0$$

في هذه الحالة تسمى النظام نظام كرامر و حل النظام هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \text{ حيث } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$* \text{ للنظمة } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا فقط إذا كان } ab' - a'b = 0$$

في هذه الحالة: - إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$ فإن S هي مجموعة حلول المعادلة $ax + by = c$

- إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ فإن $S = \emptyset$

تمرين

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

$$-1 \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{3}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{3}y = 3 \end{cases}$$

$$-2 \text{ حل و ناقش وفق البارامتر } m \text{ النظام } \begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

-3- نظمات تالفة أخرى

أ- نظام ثلاث معادلات بمجهولين

حل في \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 2y = -4 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$$

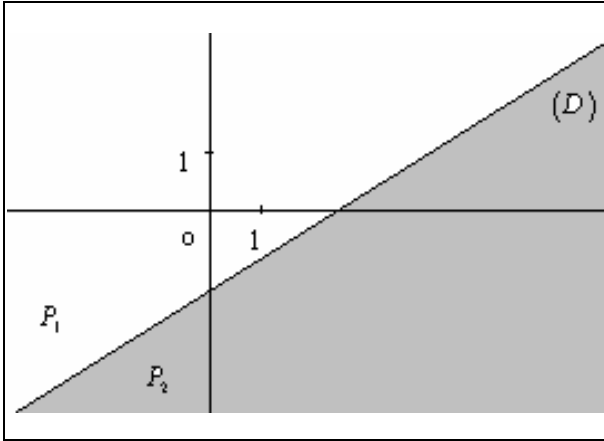
ب- نظام معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

حل في \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

-1 إشارة $ax + by + c$



كل مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$ يحدد في المستوى
نصفي مستوي مفتوحين P_1 و P_2 (لايتضمنان (D))
أحدهما هو مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $ax + by + c < 0$
و الأخر هو مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $ax + by + c > 0$

ملاحظة

لتحديد إشارة $ax + by + c$ يكفي تحديدها من أجل زوج إحداثيتي نقطة A من المستوى لا تنتمي إلى (D) نصف المستوى الذي يحتوي على A و حافته (D) هو مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تكون فيه إشارة $ax + by + c$ هي إشارة $ax_0 + by_0 + c$. و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تكون فيه إشارة $ax + by + c$ هي عكس إشارة $ax_0 + by_0 + c$

أمثلة

أدرس في \mathbb{R}^2 إشارة كل من $-2x + 3y - 2$ و $2y - 1 >$

تمارين

حل في \mathbb{R}^2 ميانيا

$$\begin{cases} 3x + y < 0 \\ x - y + 4 > 0 \\ 2x + 5y + 8 > 0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2x + y < 0 \\ 3x + y \leq 2 \end{cases}$$

2- البرمجة الخطية

تمارين

يصنع صانع منتوجين A و B بواسطة مواد أولية M_1 و M_2 و M_3 .

يتطلب صنع وحدة من المنتج A: 1 كيلو من M_1 و 3 كيلو من M_2 و 3 كيلو من M_3 .

يتطلب صنع وحدة من المنتج B: 2 كيلو من M_1 و 2 كيلو من M_2 و كيلو واحد من M_3 .

المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 20 كيلو من M_1 و 30 كيلو من M_2 و 27 كيلو من M_3 .

إذا علمت أن بيع وحدة من نوع A يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع B يحقق ربحا قدره 20 درهما. فما هو عدد وحدات منتج A و عدد وحدات منتج B اللذان يحققان أكبر ربح؟

لتكن x عدد وحدات منتج A و y عدد وحدات منتج B

لإنتاج A و B يتطلب $(x + 2y)Kg$ من M_1 حيث $x + 2y < 20$ و $(3x + 2y)Kg$ من M_2 حيث

$3x + 2y < 30$ و $(3x + y)Kg$ من M_3 حيث $3x + y < 27$

الزوج $(x; y)$ الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y - 20 < 0 \\ 3x + 2y - 30 < 0 \\ 3x + y - 27 < 0 \end{cases}$$

الربح هو $40x + 20y$

نعتبر $(\Delta_0): 40x + 20y = 0$ و $(\Delta_b): 40x + 20y = b$ حيث b ربح عند إنتاج x وحدة من منتج A و y عدد

وحدة من منتج B و حيث (Δ_b) يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون

b تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين $3x + y = 27$; $3x + 2y = 30$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (8; 3)$$

الربح القصوي هو $40 \times 8 + 20 \times 3 = 380DH$

