

# 4ème - Calcul littéral, équations

## COMPÉTENCES ÉVALUÉES DANS CE CHAPITRE :

(T : compétences transversales, N : activités numériques, G : activités géométriques, F : gestion de données et fonctions)

| Intitulé des compétences |  | Eval.1                                     | Eval.2 | Eval.3 |
|--------------------------|--|--|--------|--------|
| T1                       | Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours                                 | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N22                      | Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité                 | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N23                      | Développer un produit à l'aide de la règle de distributivité simple                                  | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N24                      | Factoriser, réduire une somme à l'aide de la règle de distributivité simple                          | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N25                      | Appliquer la règle de suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou d'un signe -.            | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N26                      | Développer un produit en utilisant la règle de distributivité double                                 | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N27                      | Résoudre une équation du premier degré à une inconnue  | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
| N28                      | Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue | ○ ○  | ○ ○    | ○ ○    |
|                          |  | <b>Taux de réussite :</b><br>..... %       |        |        |
|                          |  | <b>Note du chapitre :</b><br>..... /20     |        |        |
|                          |  | <b>Moyenne de la classe :</b><br>..... /20 |        |        |

\* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

### Légende du tableau de compétences :

- Deux points verts :** *Je sais très bien faire*
- Un point vert :** *Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*
- Un point rouge :** *Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*
- Deux points rouges :** *Je sais pas faire du tout*

## 12.1 Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont représentés par des lettres. Une même lettre désigne toujours un même nombre dans une expression littérale donnée.

**Par exemple :**

$E = 4x^2 - x + 3$  est une expression littérale dans laquelle un nombre est représenté par la lettre  $x$

On peut **calculer la valeur de cette expression** lorsque la lettre prend une valeur donnée.

**Par exemple**, pour  $x = -2$ , on a  $E = 4 \times (-2)^2 - (-2) + 3 = 4 \times 4 + 2 + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$

**Tester** si l'égalité  $2x + 4 = 13 - x$  est vraie pour  $x = 3$

- **D'une part**, le premier membre vaut  $2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$ ,
- **d'autre part** le second membre vaut  $13 - 3 = 10$

Comme les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vérifiée.

## 12.2 Développer un produit grâce à la règle de distributivité simple

### Définition

**Développer** un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Pour ce faire, on dispose d'un premier moyen :

### Développer grâce à la règle de distributivité simple

Soient  $k$ ,  $a$  et  $b$  trois nombres relatifs. On a :

$$k(a+b) = k \times a + k \times b \quad \text{autrement dit, en simplifiant l'écriture,} \quad k(a+b) = ka + kb$$

**Exemples :**

- $2(3+5x) = 2 \times 3 + 2 \times 5x = 6 + 10x$
- $5y(3-2y) = 5y(3+(-2y)) = 5y \times 3 + 5y \times (-2y) = 15y - 10y^2$

## 12.3 Factoriser, réduire une expression

### Définition

**Factoriser** une somme ou une différence signifie l'écrire sous la forme d'un produit.

C'est donc l'opération "inverse" du développement :

### Factoriser grâce à la règle de distributivité simple

Soient  $k$ ,  $a$  et  $b$  trois nombres relatifs ; on a

$$\underbrace{ka + kb}_{\text{facteur commun}} = k(a + b) \quad \text{autrement dit, en simplifiant l'écriture,} \quad \boxed{ka + kb = k(a + b)}$$

Exemples :

$$\bullet \underbrace{5x + 5y}_{\text{facteur commun}} = 5(x + y)$$

$$\bullet 3b - 5b = \underbrace{3b + (-5)b}_{\text{facteur commun}} = (3 - 5)b = -2b$$

$$\bullet 3x^2 - x = \underbrace{x \times 3x - x \times 1}_{\text{facteur commun}} = x(3x - 1)$$

### Définition

**Réduire** une expression littérale, cela consiste à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

Exemples :

$$\bullet 5x - 2 + 3x + 7 = 5x + (-2) + 3x + 7 = 5x + 3x + (-2) + 7 = 8x + 5$$

On a regroupé d'une part les "**termes en  $x$** ", d'autre part les "**termes constants**"

$$\bullet 5x^2 + x - 7x^2 + 5x - 11 = 5x^2 + x + (-7x^2) + 5x + (-11) = 5x^2 + (-7x^2) + x + 5x + (-11) = -2x^2 + 6x - 11$$

On a regroupé entre eux les "**termes en  $x^2$** ", les "**termes en  $x$** ", et enfin les "**termes constants**"

## 12.4 Règles de suppression des parenthèses précédées d'un signe +, d'un signe -

### Parenthèses précédées d'un signe +

Pour **ajouter** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner chaque terme de cette somme algébrique :

$$\text{Pour tous nombres relatifs } a, b, c \text{ et } d, \text{ on a} \quad a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

Exemples :  $\bullet 2x + (3 + 5x) = 2x + 3 + 5x = 7x + 3$        $\bullet 5 + (9x - 1) = 5 + 9x - 1 = 9x + 4$

### Parentèses précédées d'un signe –

Pour **soustraire** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'ajouter les opposés de chacun des termes de cette somme algébrique :

$$\text{Pour tous nombres relatifs } a, b, c \text{ et } d, \text{ on a } a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

**Exemples :**    •  $2x - (3 + 5x) = 2x - 3 - 5x = -3x - 3$     •  $5 - (9x - 1) = 5 - 9x + 1 = -9x + 6$

## 12.5 Double distributivité

### Règle de double distributivité

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres relatifs ; on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**Exemples :**

- $(x + 2)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + 2 \times x + 2 \times 5 = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(3x + 2)(x - 5) = (3x + 2)(x + (-5)) = 3x \times x + 3x \times (-5) + 2 \times x + 2 \times (-5) = 3x^2 + (-15x) + 2x + (-10) = 3x^2 - 13x - 10$

## 12.6 Résoudre une équation du premier degré

### Définitions

- Une **équation** est une égalité dans laquelle un nombre - appelé **inconnue** de l'équation - est représenté par une lettre.
- S'il en existe, la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour la(les)quelle(s) l'égalité est vraie sont appelées **solutions** de l'équation.
- **Résoudre** une équation consiste à trouver **toutes** ses solutions

**Exemple :**

$2x + 3 = 11$  est une équation, d'inconnue  $x$ .

On dit qu'elle est du **premier degré**, car la plus grande puissance de  $x$  est 1.

- $x = 2$  **n'est pas** une solution de cette équation ; en effet, on a  $2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \neq 11$
- $x = 4$  **est** une solution de cette équation ; en effet, on a  $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

## Comment résoudre une équation ?

On s'appuie sur deux règles de calcul sur les égalités :

### Règles de calcul sur les égalités

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres relatifs.

On ne change pas une égalité (c'est-à-dire qu'une égalité vraie reste vraie) lorsque :

– on **ajoute** (ou on **soustrait**) un **même nombre** à ses deux membres :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a + c = b + c \text{ et } a - c = b - c$$

– on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** chacun de ses deux membres :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a \times c = b \times c \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

**Application à la résolution d'une équation :** Pour résoudre une équation de ce type, on doit **isoler**  $x$  dans un des membres de l'équation.

|          |                               |          |
|----------|-------------------------------|----------|
|          | $x + 7 = -2x - 2$             |          |
| $+2x$    | $x + 7 + 2x = -2x - 2 + 2x$   | $+2x$    |
|          | $3x + 7 = -2$                 |          |
| $-7$     | $3x + 7 - 7 = -2 - 7$         | $-7$     |
|          | $3x = -9$                     |          |
| $\div 3$ | $\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$ | $\div 3$ |
|          | $x = -3$                      |          |

La solution de cette équation est  $-3$

Vérification :  $-3 + 7 = 4$  et  $-2 \times (-3) - 2 = 4$

① On commence par **ajouter  $2x$  aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les  $x$  du second membre.

② Ensuite on **soustrait  $7$  aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les termes constants du premier membre.

③ On termine en **divisant par  $3$  les deux membres de l'équation** pour finir d'isoler l'inconnue.

## 12.7 Mettre en équation et résoudre un problème

Toutes les résolutions de problèmes par mise en équation se déroulent selon un schéma en 4 étapes, qu'il faut impérativement respecter ; en voici un exemple :

**Énoncé :** Deux enfants, Adrien et Béatrice, jouent aux billes. Adrien dit : "J'ai seize billes de moins que toi..." ; ce à quoi Béatrice répond : "J'en ai trois fois plus que toi!". Combien de billes possède Adrien ?

**Résolution :**

|   |  |
|---|--|
| <b>Etape 1 : choix de l'inconnue</b>          | On note $x$ le nombre de billes que possède Adrien.  |
| <b>Etape 2 : mise en équation du problème</b> | <p>La phrase "J'ai seize billes de moins que toi..." se traduit par "Béatrice possède <math>x + 16</math> billes".</p> <p>La phrase "J'en ai trois fois plus que toi!" se traduit par "Béatrice possède <math>3x</math> billes".</p> <p>On a donc l'équation <math>x + 16 = 3x</math></p>  |
| <b>Etape 3 : résolution de l'équation</b>     | $\begin{array}{r} x + 16 = 3x \\ -3x \left[ \begin{array}{r} x + 16 - 3x = 3x - 3x \\ -2x + 16 = 0 \end{array} \right. -3x \\ -16 \left[ \begin{array}{r} -2x + 16 - 16 = 0 - 16 \\ -2x + 16 - 16 = 0 - 16 \end{array} \right. -16 \\ \div(-2) \left[ \begin{array}{r} -2x = -16 \\ \frac{-2x}{-2} = \frac{-16}{-2} \\ x = 8 \end{array} \right. \div(-2) \end{array}$ <p style="text-align: center; border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">La solution de cette équation est 8</p> <p style="text-align: center;">Vérification : <math>8 + 16 = 24</math> et <math>3 \times 8 = 24</math></p> |
| <b>Etape 4 : Interprétation et conclusion</b> | <p><i>NB : Le résultat est un nombre entier positif, ce qui est cohérent avec l'énoncé</i></p> <p>Pierre possède 8 billes (et Béatrice 24).</p>  |