

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES

1) Égalité et opérations

a) Égalité et addition -soustraction : Si $a = b$, alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$

Lorsqu'on ajoute ou lorsqu'on retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : si $x + 5 = 3$ alors $x + 5 - 5 = 3 - 5$. **Donc $x = -2$** .

b) Égalité et multiplication : Si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$

Si on multiplie par un même nombre les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : Si $\frac{x}{3} = \frac{1}{6}$ alors $\frac{x}{3} \times 3 = \frac{1}{6} \times 3$. **Donc $x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$** .

c) Égalité et division : Si $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, si $a \neq 0$.

Si on divise par un même nombre non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : Si $5x = -4$ alors $\frac{5x}{5} = \frac{-4}{5}$. **Donc $x = \frac{-4}{5}$** .

2) Équation : définitions

a) Définition 1 : Une équation est une égalité dans laquelle figure un ou plusieurs nombres inconnus représentés par une ou plusieurs lettres.

Exemple : $2x + 7 = 10x + 35$ est une équation d'inconnue x .
 $2x + 7$ est le 1^{er} membre de l'équation.
 $10x + 35$ est le 2^{ème} membre de l'équation.

b) Définition 2 : Une solution d'une équation à une inconnue x est une valeur de x vérifiant l'égalité des 2 membres.

Exemple : Le nombre $x = \frac{-4}{5}$ est une solution de l'équation $5x = -4$, car $5 \times \frac{-4}{5} = -4$.

c) Définition 3 : Résoudre une équation à une inconnue x , c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Exemple : $3x - 4 = 2$.
Alors $3x - 4 + 4 = 2 + 4$. Donc $3x = 6$. D'où $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$. **Donc $x = 2$** .

3) Équations de base

a) Équation : $x + a = b$ $x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$
Exemples : $x - 8 = -15$ $x + 5 = 3$ $4 - x = 5$

b) Équation : $ax = b$ avec $a \neq 0$ $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
Exemples : $3x = 5$ $-5x = -15$

c) Équation : $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a}$
Exemples : $\frac{2}{5}x = \frac{7}{15}$ $\frac{-5}{9}x = \frac{20}{-12}$

$$x = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\frac{20}{-12}}{\frac{-5}{9}} = \frac{20}{-12} \times \frac{9}{-5}$$

$$x = \frac{7 \times 5}{3 \times 5 \times 2} = \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{4 \times 5 \times 3 \times 3}{-3 \times 4 \times -5} = \frac{3}{1} = 3$$

4) Équations : $ax + b = cx + d$

On regroupe les termes avec les x d'un côté du signe = et les termes sans x de l'autre côté, en utilisant les propriétés du 1^{er} paragraphe.

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax - cx = d - b$$

$$\Leftrightarrow (a - c)x = d - b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{d - b}{a - c} \quad \text{si } a \neq c$$

Exemples :

$-7x + 8 = -6$	$3x + 8 = 4 - 5x$	$\frac{5}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + 2x$
$-7x = -6 - 8$	$3x + 5x = 4 - 8$	$\frac{5}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + 2x$
$x = \frac{-14}{-7} = 2$	$x = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}x - \frac{8}{4}x = \frac{5}{6} + \frac{4}{6}$
		$-\frac{3}{4}x = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{9}{6}}{-\frac{3}{4}}$
		$x = \frac{9}{6} \times -\frac{4}{3} = -\frac{36}{18} = -2$

5) Résolution de problèmes

- On explique le choix de l'inconnue, ce que représente l'inconnue dans le problème.
- On met le problème en équation, en traduisant chaque phrase à l'aide des signes mathématiques.
- On résout l'équation.
- On conclut en rédigeant la réponse à la question posée dans le problème.

Exemple 1 : Un père de 40 ans a 3 enfants âgés respectivement de 8 ans, 5 ans et 2 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal au double de la somme des âges des enfants ?

- **Soit x le nombre d'années** où l'âge du père sera le double de la somme des âges des enfants.
- **Dans x années**, le père aura $40 + x$, les enfants auront respectivement $8 + x$, $5 + x$ et $2 + x$.
Donc, dans x années, $40 + x = 2 \times (8 + x + 5 + x + 2 + x)$.
D'où l'équation $40 + x = 2 \times (15 + 3x)$.

- On résout cette équation. $40 + x = 2 \times (15 + 3x) \Leftrightarrow 40 + x = 2 \times 15 + 2 \times 3x \Leftrightarrow 40 + x = 30 + 6x$.
 $40 + x = 2 \times (15 + 3x) \Leftrightarrow 40 - 30 = 6x - x \Leftrightarrow 10 = 5x$.

$$\text{Donc } \frac{10}{5} = x = 2.$$

- **Conclusion** : Dans 2 ans, le père aura 42 ans et les enfants auront respectivement 10, 7 et 4 ans.
Dans 2 ans, l'âge du père sera égal au double de la somme des âges des enfants.
- **Vérification** : la somme des âges des enfants sera $10 + 7 + 4 = 21$ ans et $42 = 2 \times 21$.

Exemple 2 : Pierre dépense les $\frac{2}{5}$ de ses économies, puis les $\frac{2}{3}$ du reste.
Il dépense maintenant le $\frac{1}{4}$ de ce qui lui reste. A la fin, il lui reste 9 euros.
Quel était le montant de ses économies ?

- **Soit x le montant des économies de Pierre.**

- **Pierre dépense $\frac{2}{5}x$.** Il lui reste $x - \frac{2}{5}x = \frac{5}{5}x - \frac{2}{5}x = \frac{3}{5}x$.

Il dépense maintenant $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$. Il a dépensé au total $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x$.

Il lui reste $x - \frac{4}{5}x = \frac{5}{5}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x$. Il dépense maintenant $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}x = \frac{1}{20}x$.

Au total, il a dépensé $\frac{4}{5}x + \frac{1}{20}x = \frac{16}{20}x + \frac{1}{20}x = \frac{17}{20}x$. Il lui reste 9 €.

D'où l'équation : $x = \frac{17}{20}x + 9$.

- On résout cette équation.

$$x = \frac{17}{20}x + 9 \Leftrightarrow x - \frac{17}{20}x = 9 \Leftrightarrow \frac{20}{20}x - \frac{17}{20}x = 9 \Leftrightarrow \frac{3}{20}x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\frac{3}{20}} = 9 \times \frac{20}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3 \times 3 \times 20}{3}$$

D'où $x = 60$.

- **Conclusion** : **Pierre avait 60 euros d'économie.**