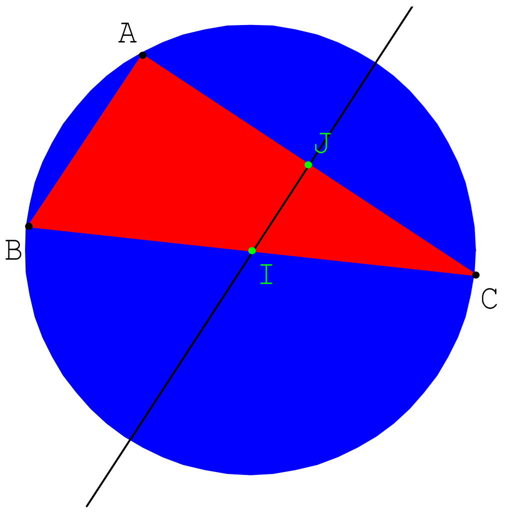
TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

1) Cercle circonscrit à un triangle rectangle :

a) Propriété 1 :

Si ABC est un triangle rectangle en A, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est alors, le milieu I de l'hypoténuse [BC].

Démonstration :



BI = IC. Donc I est sur la médiatrice de [BC].

La parallèle à (AB) passant par I coupe [AC] en J.

Alors d'après la réciproque du théorème des milieux, J est le milieu de [AC].

De plus (IJ) // (AB) et (AB) $\perp$ (AC),

alors (IJ) $\perp$ (AC). Donc (IJ) est la médiatrice de [AC]. Donc I est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC.

I est le centre du cercle circonscrit à ABC.

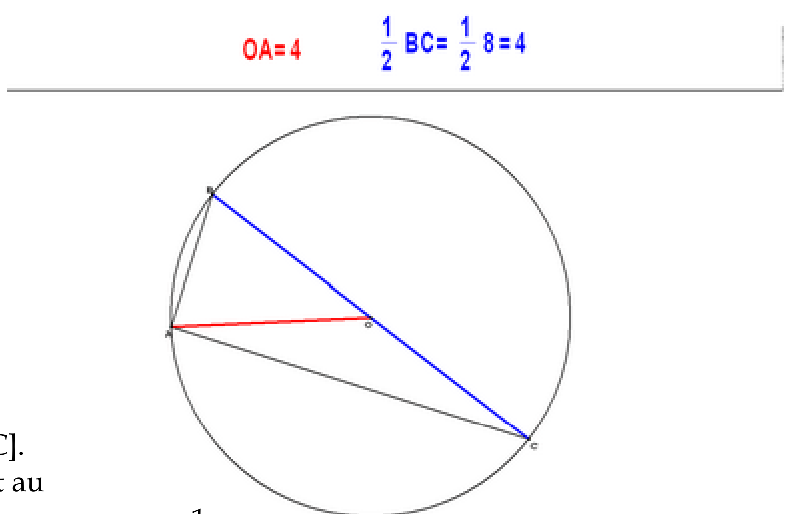
b) Propriété 2 : Réciproque.

Si ABC est un triangle dont le cercle circonscrit a pour diamètre [BC], alors ABC est un triangle rectangle en A.

Démonstration :

Le centre du cercle circonscrit est alors le milieu I de [BC]. IA = IB = IC.
Donc I est sur la médiatrice (Δ) de [AC]. (Δ) coupe [AC] en J, qui est donc le milieu de [AC].
D'après le théorème des milieux, (IJ) // (AB). Comme (IJ) $\perp$ (AC), alors (AB) $\perp$ (AC).
Donc ABC est un triangle rectangle en A.

2) Médiane d'un triangle rectangle



a) Propriété 1 :

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors la longueur AI de la médiane issue de A est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse [BC].

Démonstration :

Si [AI] est la médiane issue de A, alors I est le milieu de l'hypoténuse [BC].
Donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc AI = BI = CI = (rayon). Donc AI = $\frac{1}{2}$ BC.

b) Propriété 2 : Réciproque.

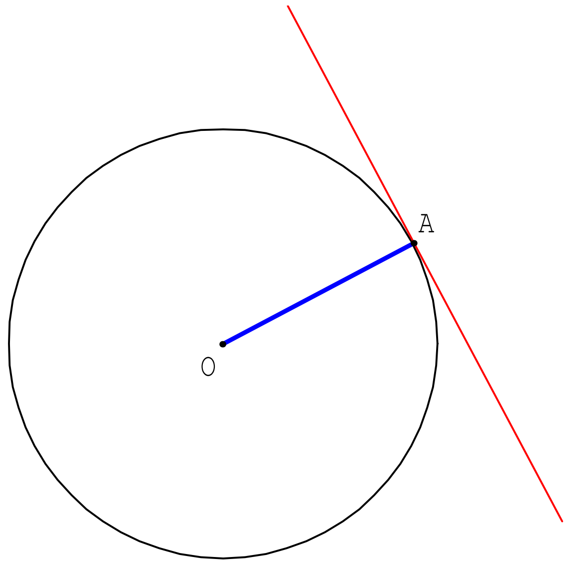
Si ABC est un triangle tel que la longueur AI de la médiane [AI] issue de A est égale à la moitié de la longueur BC du plus grand côté [BC], alors ABC est un triangle rectangle en A.

Démonstration :
AI = BI = CI. Donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
De plus [BC] est un diamètre. Donc ABC est un triangle rectangle en A.

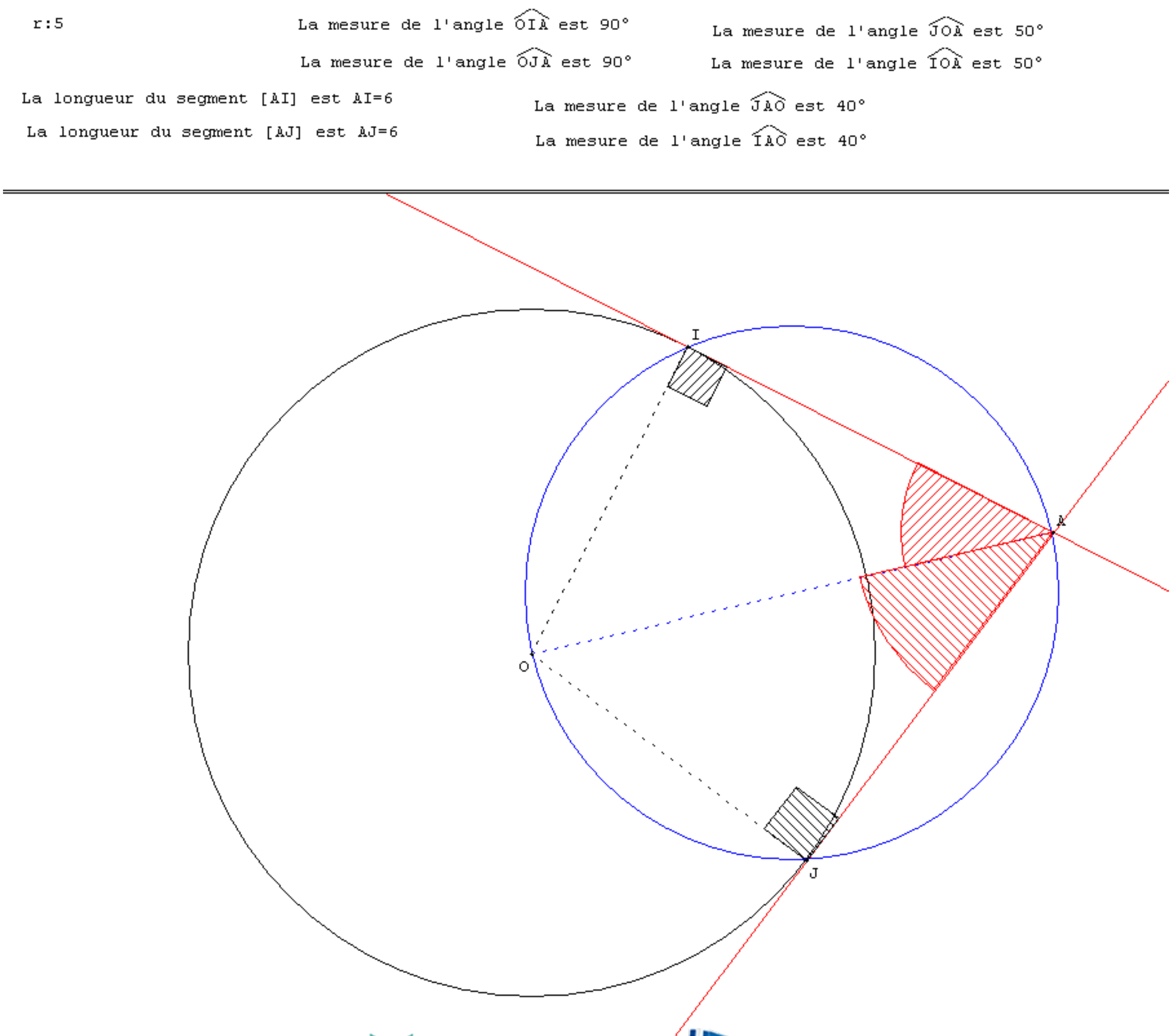
3) Tangente à un cercle

a) Définition :

La tangente en un point A, à un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O,
est la droite (Δ) passant par A et
qui est perpendiculaire au rayon [OA].



b) Construction des tangentes à un cercle ($\mathscr{C}$) passant par un point A extérieur au cercle ($\mathscr{C}$).



Distance d'un point à une droite :

Propriété :
Le point H de la droite (d) le plus proche de A est le pied de la hauteur issue de A, donc le point d'intersection de (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Définition : AH s'appelle la distance de A à (d).