# LIMITE D'UNE FONCTION

## I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$

1)Le centre de l'intervalle] $a$, $b$ [est le réel

$x_0 = \frac{a+b}{2}$

2)Le rayon de l'intervalle $]a, b[$ est le réel positif

$r = \frac{b-a}{2}$

**Activité :** Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre $x_0$ et de rayon $r$

(deux réels données)

**Définition :**L'ensemble : ¨

$]a;b[^* = \{x \in \mathbb{R} / a \prec x \prec b\} - \{x_0\}$ où $x_0$ est le centre de l'intervalle $]a, b[$ :

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes $a$ et $b$.

**Remarque :**Si $r$ est le rayon de l'intervalle $]a, b[$ et $x_0$ son centre alors : $]a;b[^* = ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}$

$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

**Activité1 :**Montrer que

$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

**Activité2 :**

1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler $f(A) \subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues :

$f(]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}) \subset ]l - \beta; l + \beta[$

## II) LIMITE NULLE EN 0.

**Activité3 :**Considérons la fonction : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^3}{|x|} \end{array}$

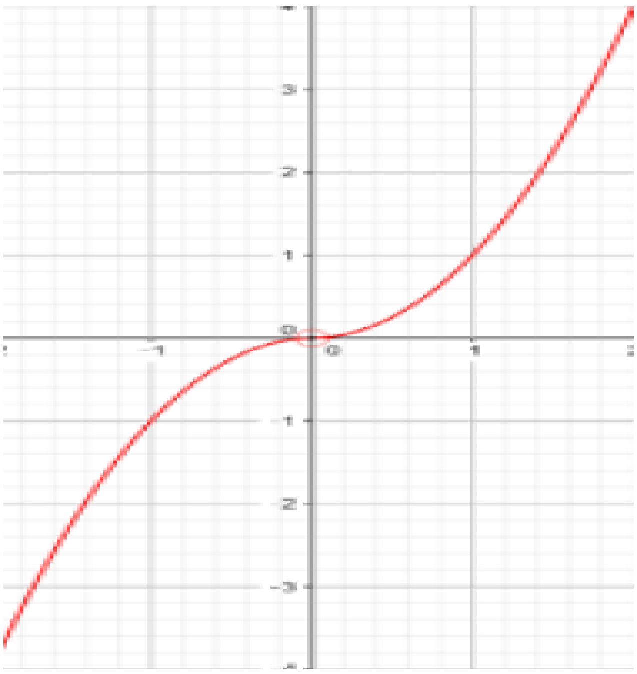
1- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

2- Ecrire des expressions de $f$ sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de $f$ est ci-contre :

a)- Déterminer un réel $\alpha$ tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-2; 2[$




b)- Déterminer un réel $\alpha$ tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-10^2; 10^2[$ [

c)- Déterminer un réel $\alpha$ tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$

En répondant à la question 3-c) on peut Conclure que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

On dit que la fonction $f$ admet 0 comme limite en 0. et on écrit : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que $f$ admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

On écrit : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

**Remarques :**1)Le faite que $f$ est définie sur un intervalle pointé est essentielle. $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0.

$Dg = \{0\}$.

**Propriété :** Si $f$ et $g$ sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ alors $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

**Propriété :** Les fonctions : $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ; $x \mapsto kx$

Tendent vers 0 quand $x$ rend vers 0.

**Exercice :** Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

**Solution :** Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0<|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ ?

Soit : $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ donc $|f(x)| = \left|\dfrac{x}{x+1}\right| \le 2|x|$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$0<|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x| \prec \varepsilon$ et $|x| \prec \dfrac{1}{2}$ cad $|x| \prec \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|x| \prec \dfrac{1}{2}$

Il suffit de prendre $\alpha$ le plus petit des nombres : $\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$

donc : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

## III) LIMITE FINIE L EN a.

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle pointé de centre $a$ et $l$ un réel. On dit que la fonction $f$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ si : $\lim_{x\to a} f(x)-l=0$. c.-à-d. :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

**Propriété :** Si $P$ est une fonction polynôme alors $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Une fonction polynôme $P$ c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.+...+a_nx^n$

**Exemple :** $\lim_{x\to 2} 3x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$

**Propriété:** Si sur un intervalle pointé de centre $a$ on a : $|f(x)-l| \le u(x)$ et $\lim_{x\to a} u(x)=0$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$

**Exemple1 :** 1)monter que : $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2)a)monter que : $\forall x \in ]-1;1[$ : $|x^2+5x| \le 6|x|$

b)Calculer $\lim_{x\to 0} x^2+5x$

**Solution :** 1) $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right| \le 1$

donc $\left|x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2=0$

Donc : $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2)a) on a : $|x^2+5x|=|x(x+5)|=|x||x+5|$

Et puisque : $x \in ]-1;1[$ alors : $4 \prec x+5 \prec 6$

alors : $|x+5| \prec 6$ donc $|x^2+5x| \le 6|x|$

b) puisque : $\lim_{x\to 0} 6|x|=0$ alors : $\lim_{x\to 0} x^2+5x$

**Exemple2 :** monter que: $\lim_{x\to 0} 2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=2$

**Solution :** $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc :

$|f(x)-2| = x^2\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2=0$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

**Exemple3 :** monter que: $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1}=3$

**Solution :** $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \dfrac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$

et on a $\sqrt{2x+1}+3 \ge 3$ donc : $|f(x)-3| \le \dfrac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to 4} |x-4|=0$ Alors : $\lim_{x\to 4} f(x)=3$

**Propriété :** Si $f$ et $g$ sont confondues sur un intervalle pointé de centre $a$ et si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=l$

**Exemple :** On se propose d'étudier la limite de la fonction : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ D'autre part :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|f(x)| \leq |x|)$ et puisque $\lim_{x\to 0}|x|=0$ alors

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

**Propriété :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle pointé de centre $a$ et $l$ un réel. la fonction $f$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ si : la fonction $h\to f(a+h)-l$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0

**Exemple1 :** $f(x)=x^2+3x+2$

monter que : $\lim_{x\to -1} f(x)=6$

**Solution :** $f(-1+h)-6=h^2-5h$

$|f(-1+h)-6|=|h^2-5h|=|h||h-5|$

**Si** $h\in]-1;1[$ alors : $|f(-1+h)-6|\leq 6|h|$

puisque : $\lim_{h\to 0}6|h|=0$ alors : $\lim_{h\to 0} f(-1+h)-6=0$

donc : $\lim_{x\to -1} f(x)=6$

**Exemple2 :** $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

monter que : $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{3}$

**Solution :** $f(-1+h)-6=h^2-5h$

$f(2+h)-\frac{1}{3}=\frac{2h}{3+h}$

**Si** $h\in]-1;1[$ alors : $\left|f(2+h)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2h}{3+h}\right|\leq|h|$

puisque : $\lim_{h\to 0}|h|=0$ alors : $\lim_{h\to 0} f(2+h)-\frac{1}{3}=0$

donc : $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{3}$

**Propriété :**Si sur un intervalle pointé de centre $a$ on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$

**Propriété :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle pointé de centre $a$

on a : $\lim_{x\to a}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=0$

**Remarque :**

$\lim_{x\to a}|f(x)|=l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a} f(x)=-l$

**Propriété :**Si $f$ admet une limite $l$ en $a$ alors cette limite est **unique.**

## *IV) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.*

### *1) Définition*

**Activité :**Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-E(x)\end{array}$

Où $E$ désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de $f$ sans utiliser la partie entière sur les intervalles ]0,1[ et ]1,2[.

2- Construire la courbe de la restriction de $f$ sur [0,2].

3- La fonction $f$ admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$

a) Remarquer que $f$ et $g$ sont confondues sur ]0,1[ et que $f$ et $h$ sont confondues sur ]1,2[

b) déterminer les limites de $g$ et de $h$ en 1.

**Définition1 :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme] $a$, $a + r$[ où $r > 0$ et $l$ un réel. On dit que la fonction $f$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ à droite si la proposition suivante est vraie :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in Df)(a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Et on écrit : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$

**Définition2 :**Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme ]$a$ - r, $a$ [ où $r > 0$ et $l$ un réel. On dit que la fonction $f$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ à gauche si la proposition suivante est vraie :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in Df)(a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Et on écrit : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$

**Exemple :**Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)$

**Solution :** $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ 1$ : $f(x)=\frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

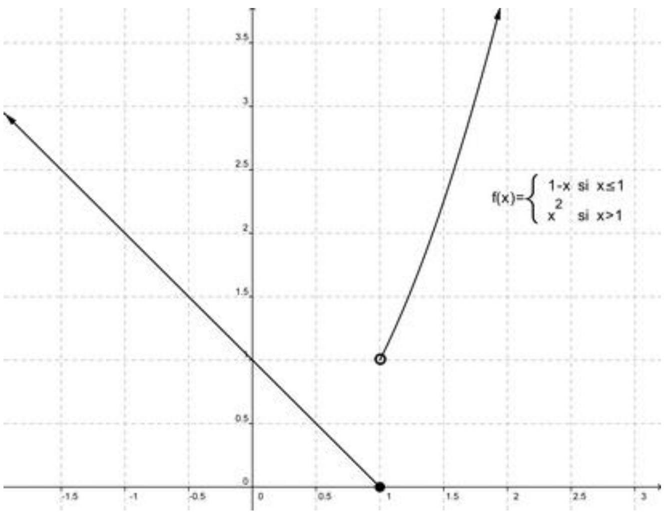
Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec1$ : $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)$

**Exercice1 :**




La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-x \text{ si } x\leq1$

$x\mapsto x^2 \text{ si } x\succ2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction $f$ à droite et à gauche de 1.

**Exercice2 :** Soit la fonction $g$ définie par :

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x^2-x+3 \text{ si } x\geq1$

$x\mapsto -x^2+x+\alpha \text{ si } x<1$

Déterminer $\alpha$ pour que la fonction $g$ admet une limite en 1.

**Théorème :** Une fonction $f$ admet une limite $l$ en $a$ si et seulement si elle admet une limite à droite de $a$ égale à sa limite à gauche de $a$ égale à $l$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=l$

**Exemple :** Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

**Solution :**

Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)$ ?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec1$ : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}-\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec-1$ : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$

## 2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraie à droite et à gauche de $a$ en tenant compte des conditions

**Propriété :** Si sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ on a: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} u(x)=0$

alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

**Propriété :** Si $f$ et $g$ sont confondues sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} g(x)=l$

## 3) Opérations sur les limites finies.

***Propriété :*** Soient $f$ et $g$ deux fonctions tels que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$ et $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$ et

$\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=|l|$ et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'}$ si $l'\neq0$

et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$ si $l'\neq0$ et $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f}(x)=\sqrt{l}$ si $l\succ0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel $a$.

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

# V) EXTENTION DE LA NOTION DE LIMITE.

## 1) Limite infinie à droite (à gauche) de $a$.

**Activité :** Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

La courbe représentative de $f$ est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $10^{-2}$ | $10^{-6}$ | $10^{-20}$ | ... | $10^{-p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

Que remarquer-vous ?

Considérons $A$ = 10100 déterminer un réel $\alpha$ tel que si $0 < x < \alpha$

Alors $f(x) > 10100$.

Montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre $f(x)$ aussi grand qu'on veut ; on dit que la limite de $f$ est $+\infty$ quand $x$ tend vers 0 à droite et

on écrit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme$]a, a+r[$ où $r > 0$, on dit que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$ adroite si :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions : $x \mapsto k|x|$ ; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$ Tendent vers 0 quand $x$ rend vers 0.

**Propriétés :**

l'inverse des fonctions $x \mapsto k|x|$ ; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$ où $k$ un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 0.

**Définitions :** 1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

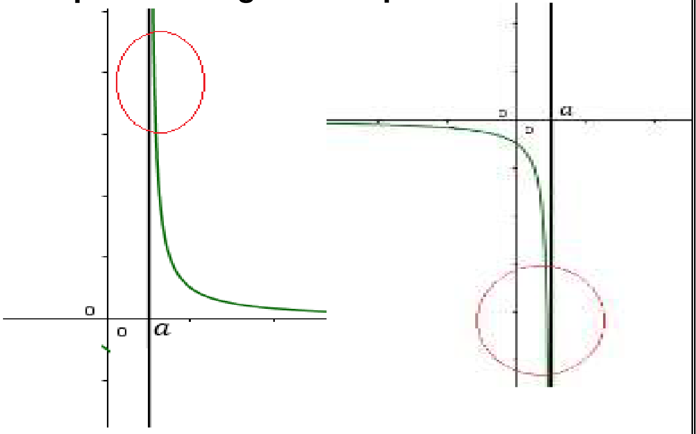
2) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

**Interprétations géométriques :**




$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$  $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

**Exercice :** Compléter l'interprétation géométrique.

**Définition :** Si la fonction $f$ vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou

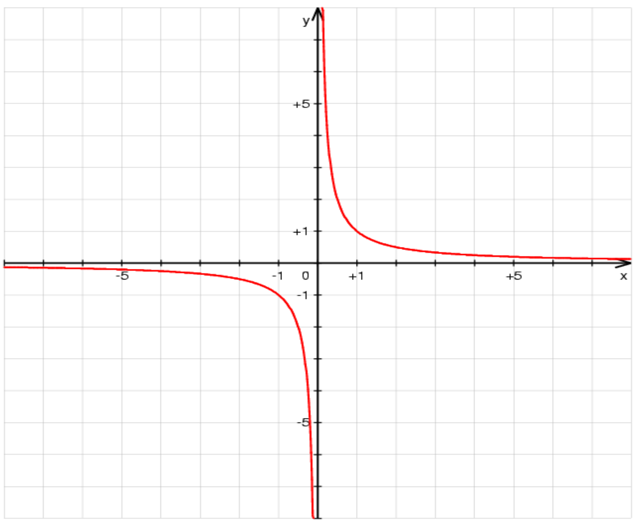
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ Alors

On dit que la droite $(\Delta)$: $x = a$ est une Asymptote verticale.

## 2) Limites finies en $\pm\infty$

**Activité :** Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

La courbe représentative de $f$ est l'hyperbole de centre $O(0,0)$




1- Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $10^2$ | $10^6$ | $10^{20}$ | ... | $10^p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

Que remarquer-vous ?

Considérons $\varepsilon = 10^{-100}$ déterminer un réel $B$ tel que si $x > B$ alors $|f(x)| < \varepsilon$ .
En général, montrer que :
(P) : $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$
**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$
($a$ un réel quelconque) et $l$ un réel, on dit que la fonction $f$ tend $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

**Propriétés :** les fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{|x|}$ ; $x \mapsto \dfrac{k}{\sqrt{|x|}}$ ;

$x \mapsto \dfrac{k}{|x|^n}$ où $k$ un réel donné et $n \in \mathbb{N}*$

Tendent vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.
**Définitions :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ($a$ un réel quelconque) et $l$ un réel, on dit que la fonction $f$ tend $l$ quand $x$ tend vers $-\infty$ si :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

**Propriété :**

- Soit $f$ et $u$ deux fonctions définies sur un intervalle de la forme : $I = ]a, +\infty[$

Si $\forall x \in I$ : $|f(x)| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- Soit $f$ et $u$ deux fonctions définies sur un intervalle de la forme : $I = ]-\infty, a[$

Si $\forall x \in I$ : $|f(x)| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$

alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

**Exemple1 :** Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+2}$

déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^2+2 \geq x^2$ donc

$|f(x)| \leq \dfrac{3}{x^2}$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

**Exemple2 :** Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

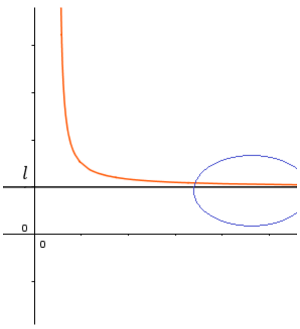
**Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left|\dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

**Interprétation géométrique :**




$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

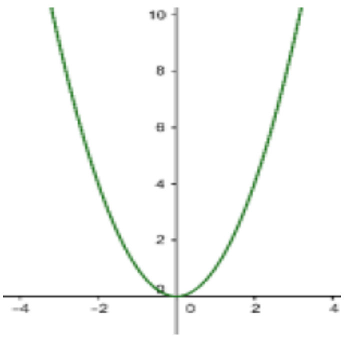
Compléter les autres interprétations.
**Définition :** Si la fonction $f$ vérifie l'une des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Alors, on dit que la droite $(\Delta)$ : $y = l$ est une asymptote horizontale.
**Remarque :** La position de la courbe $Cf$ par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$ :
1) Si $f(x) - l \geq 0$ alors $Cf$ est au-dessus de $(\Delta)$: $y = l$
2) Si $f(x) - l \leq 0$ alors $Cf$ est au-dessous de $(\Delta)$: $y = l$

*3) Limite infinies en ±∞*

**Activité :** Considérons la fonction $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

La courbe représentative de $f$ est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $10^2$ | $10^6$ | $10^{20}$ | $\dots$ | $10^p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

Que remarquer-vous ?

Considérons $A$ = 10100 déterminer un réel $B$ tel que si $x > B$ alors $f(x) > A$ .

En général, montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

**Définition :** Soit $f$ une fonction $]a, +\infty[$ (où $a$ est un réel quelconque) on dit que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si :

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions :

$x \mapsto x^2$ ; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$ ; $x \mapsto |x|$

tendent vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$

**Définitions :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

**Remarque :** Pour l'interprétation géométrique, il y' a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

## VI) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

### 1) Limites et ordres.

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre $a$ on a : $|f(x) - l| \le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de $a$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

**Propriété :** Si $f$ et $g$ sont confondues sur un intervalle pointé de centre $a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

**Propriété :** 1) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I = ]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en $a$ et f positif sur $I$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge 0$

2) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I = ]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en $a$ et g admet une limite en $a$ et $f \le g$ sur $I$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3)si on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\succ a}} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si $x$ tend vers $a$ à droite, ou $a$ à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de $a$.)

$]a-r;a-r[-\{a\}$

**Propriété :** 1)Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+} v(x) = +\infty$

2)Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si $x$ tend vers $a$ à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

**Exemple1 :** Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

**Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ et $x^2 + x^4 \ge 0$

donc $-x^2 - x^4 \le (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x} \le x^2 + x^4$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x^4 = \lim\limits_{x\to 0} -x^2 - x^4 = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

**Exemple2:** Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \le 3x^2 + 5x + 1$ et et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**Exemple3 :** Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

**Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \le \sin x \le 1$ donc :

$x - 2 \le f(x) \le x$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

**Exercice :**Soit $f(x) = \dfrac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $f(x) \ge \dfrac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

## 2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

### 1) Limite de la somme

| $\lim f$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f+g$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme ind |

Ces propriétés sont vraies si $x$ tend vers $a+$ ; $a-$ ; $+\infty$ ou $-\infty$

**Formes indéterminées** : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

**Exemple1 :**1)$f(x) = 2 + x^2$ , $g(x) = 5 - x^2$ on a

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = -7$

2)$f(x) = 2 + x^2$ , $g(x) = 5 - x$ on a

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x + 7 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

**Exemple2 :** déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x}$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

### 2) Limites des produits

| $\lim f$ | $\ell$ | $\ell>0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell<0$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f\times g$ | $\ell\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Forme ind | Forme ind | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

### 3)Limites des inverses

| $\lim f$ | $\ell \ne 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \frac{1}{f}$ | $\frac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |

### 4) Limites des quotients

| $\lim f$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell \ne 0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $\ell' \ne 0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\ell$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim \frac{f}{g}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | ? | ? |

**Exemple1 :** déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$

**Solution :** on a : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

**Exemple2 :** déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$  2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

**Solution : 1)**on a : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+$ et

$\lim\limits_{x\to 1} x^3 + 1 = 2$ Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$

**2)**on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^3}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=-\infty$

**Exemple3 :**On veut déterminer

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}$

on a : $\lim\limits_{x\to1^+}3x+1=4$

on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0^+$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

**Remarque :**1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}$ et $\frac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

**Exercices :** Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\qquad\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

### *3) Limites d'une fonction polynôme en ±∞*

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Soit $f$ une fonction polynôme de degré $n$ tel que :

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

avec $a_n\neq0$ On a :

$$f(x)=a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)$$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1=1$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$

Même chose si $x$ tend vers $-\infty$

**Propriété :**La limite d'une fonction polynôme en **+∞** **(−∞)** est la limite de son plus grand terme en +∞ (−∞)

**Exemple :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

### *4) Limites d'une fonction rationnelle en ±∞*

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ avec $an\neq0$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ avec $b_m\neq0$

$$h(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx}$$

$$h(x)=\frac{a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)}{b_mx^m\left(\frac{b_0}{b_mx^m}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+1\right)}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1}{\frac{b_0}{b_mx^m}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si $x$ tend vers $-\infty$

**Propriété :**La limite d'une fonction rationnelle en **+∞** **(−∞)** est la limite du rapport des termes de plus grand degré en **+∞** **(−∞)**

**Exemples :**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

**Exercice :** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^3+2x\sqrt{x}}$ vous pouvez poser $\sqrt{x}=t$

## 5) Limites des fonctions trigonométriques.

**Activité :** Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On considère le cercle

Trigonométrique d'origine $A(1,0)$. $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

et $B$ le point sur le cercle

trigonométrique tel que : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv x[2\pi]$

1-Déterminer en fonction de $x$ la surface du domaine circulaire $\mathcal{D}$ limité par

$[OA)$ , $[OB)$ et l'arc géométrique $AB$

2- Soit $H$ la projection orthogonale de $B$ sur $(OA)$.

a) Déterminer en fonction de $x$ l'aire du triangle $OAB$

b) Comparer les aires du domaine $\mathcal{D}$ et du triangle, que peut-on conclure ?

3- Montrer que : ($\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$) ($|\sin x|\le|x|$).

4- Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to0}\sin x$ et $\lim\limits_{x\to a}\sin x$

et $\lim\limits_{x\to a}\cos x$

5- Considérons la droite $(\Delta)$ la droite tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en $A$

a) Soit $T$ l'intersection de $(\Delta)$ et $(OB)$, Déterminer en fonction de $x$ la surface de $OAT$.

b) En déduire que ($\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$) ($x\le\tan x$)

c) En déduire que ($\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$) ($|x|\le|\tan x|$)

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer que :a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

**Propriété :** Soit $a$ un réel on a :

1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

3)si $a\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

**Propriété :** Soit $a\in\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

**Exemples :** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

**Solution :** 1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

On pose $x-\dfrac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=2\times1=2$

**Exercice :** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

**Solution :** 1)on pose : $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq x^2$ et on a

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^3}$ ? on pose : $f(x)=\frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $|\cos x|\le 1$ donc : $|f(x)| \le \frac{1}{|x|^3}$ et on a

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|^3}=0$ Alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$ ? on pose : $f(x)=\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $-1\le\cos x\le 1$ et $-1\le \sin x\le 1$ donc :

$0\le \frac{1+\sin x}{2+\cos x}\le 2$ donc $0\le f(x)\le \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x\to+\infty} 0=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ Alors :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

4) $\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$ ? on pose : $f(x)=1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $2+\sqrt{x^4+1}\ge\sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1}\ge x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}}\le\frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1|\le\frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ Alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

**Exercice :** Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to2} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

1)Déterminer : $\lim_{x\to2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to2} 2x+1=5$ et $\lim_{x\to2} -3x^2+x=-10$

Donc : $\lim_{x\to2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to+\infty} 2x+1=\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} -3x^2+x=\lim_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to3} g(x)$ ? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to3}-2x^2+1=-17$ et

$\lim_{x\to3}(x-3)^2=0^+$ donc : $\lim_{x\to3} g(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to0} h(x)$ ?.

$\lim_{x\to0} h(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim_{x\to0} x^2+1=1$ et $\lim_{x\to0} x^2=0^+$

et $\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to0} h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to0}-3x+1=1$ et $\lim_{x\to0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : $x^2-2x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $\lim_{x\to0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^-} k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2}-3x+1=-5$ et $\lim_{x\to2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to2^-} k(x)=+\infty$

**Exercice :** calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

**Solution :** 1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$ ?

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)$

Donc :

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ ?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ (

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times 1=2$$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien**