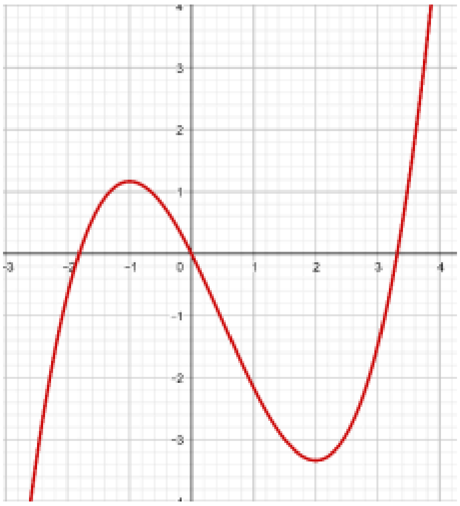
LA DERIVATION

APPLICATIONS

I) ACTIVITES

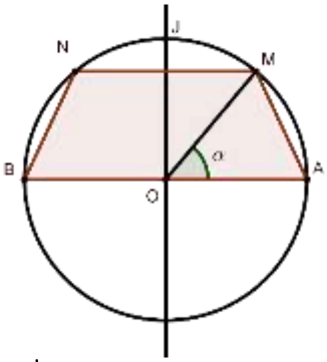
Activité 1 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.

1. Déterminer graphiquement la monotonie de f suivant des intervalles de $\mathbb{R}$
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. déterminer f' la fonction dérivée de f.
4. Trouver une relation entre le signe de f' et sa monotonie.

Activité 2 :



Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O de rayon $r=1$ et de diamètre $[AB]$,
M un point de l'arc AB qui contient J, et N le point symétrique de M par rapport à (OJ)
On se propose de déterminer la position de M pour que la surface du quadrilatère $AMNB$ soit maximale. Pour cela :

1. Déterminer l'intervalle dans lequel varie α
2. Essayer de trouver l'aire du quadrilatère $AMNB$ comme fonction $S(\alpha)$
3. Dériver la fonction $S(\alpha)$, puis étudier le signe de $S'(\alpha)$
4. En s'inspirant de l'activité précédente, dresser le tableau de variation de $S(\alpha)$
5. Déterminer la position de M pour que la surface du quadrilatère $AMNB$ soit maximale

II) DERIVATION ET MONOTONIE D'UNE FONCTION

Rappelle

Si g est une fonction positive sur un intervalle I, alors $(\forall a\in I)(\lim\limits_{x\to a} g(x)\geq 0)$.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I alors f' est nulle sur I.

Preuve :

On suppose que f est dérivable sur I et que f est croissante sur I. Posons $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on a :

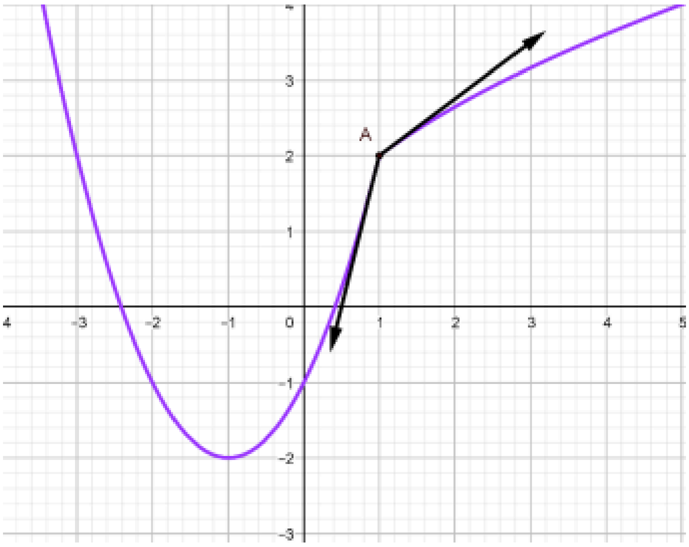
g est positive sur I (c'est le taux d'accroissement entre x et a d'une fonction croissante). En passant à la limite et d'après le rappelle $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\geq 0$

d'où $(\forall a\in I)(f'(a)\geq 0)$ donc f' est positive sur I.

Remarque :

1. Si f est dérivable et strictement croissante, on peut pas conclure que f' est strictement positive.
   $f(x) = x^3$; on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa fonction dérivée qui est $f'(x) = 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en 0.
2. Une fonction croissante sur I ne vérifie pas toujours la condition $f' \geq 0$ sur I

   Soit f dont le courbe représentative est ci-contre, on a :
   f est croissante sur $[-1,4]$ mais elle n'est même pas dérivable sur $[-1,4]$ car elle n'est pas dérivable en 1.($f'_d(1) \neq f'_g(1)$)



III) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I ; $a \in I$.
Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve :

On suppose que f admet un extremum relatif en a donc : (on suppose que c'est un maximum reltif)

$(\exists r > 0)(\forall x \in]a - r, a + r[)(f(x) \leq f(a)$

D'où :

$$(\forall x \in]a - r, a[)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\right) \quad \text{(car } f(x) \leq f(a) \text{ et} < a\text{)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a) \geq 0$$

D'autre part :

$$(\forall x \in]a, a + r[)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0\right) \quad \text{(car } f(x) \leq f(a) \text{ et} > a\text{)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a) \leq 0$$

Et puisque f est dérivable en a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$

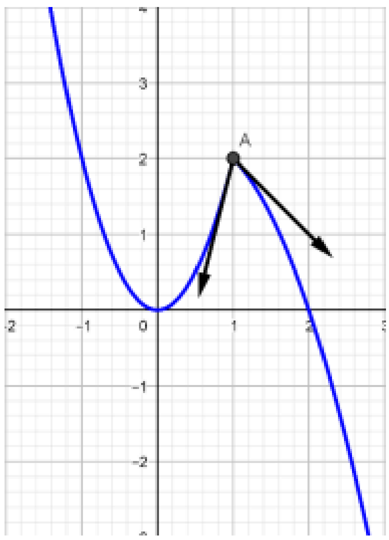
Donc : $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$ et $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$

Finalement $f'(a) = 0$.

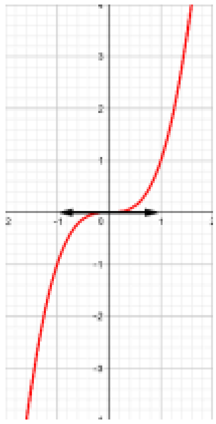
Remarque :

3. Une fonction peut admettre un extremum relatif sans qu'elle vérifie la condition $f'(a) = 0$.

Sur la figure ci-contre f admet un maximum relatif en 1 et f n'est même dérivable en 1.



4. La réciproque de la propriété précédente est fausse ; $f(x) = x^3$ on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0. (courbe ci-contre)



Propriété :

> Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

Preuve :

Puisque f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$

et donc C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :

$$(T): y = 0(x - a) + f(a)$$

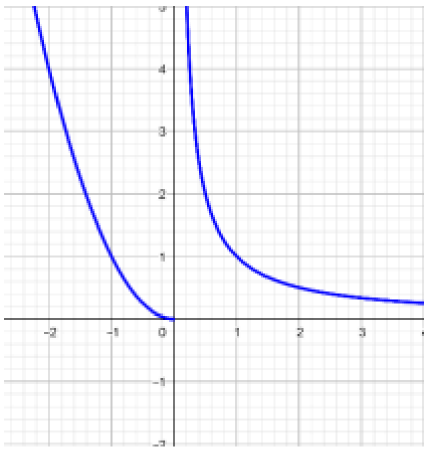
$(T): y = f(a)$ (T) est donc parallèle à l'axe de abscisses

Propriété : (Admise)

> Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
>
> - Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.
> - Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.
> - Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque :

Le faite que I est un intervalle est nécessaire.



sur la figure ci-contre on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f'(x) < 0)$ mais on peut pas dire f décroissante sur $\mathbb{R}^*$

car $f(-2) = 4 > f(1) = 1$

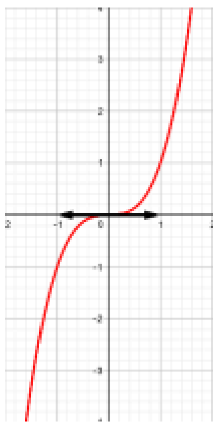
Cette fonction est définie comme suite :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Propriété :

> Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est **strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler** alors f **est strictement croissante sur I.**

Exemple :



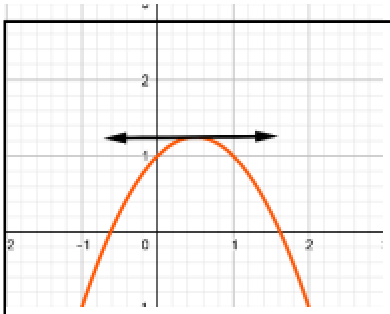
$f(x) = x^3$ sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$

et s'annule en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquer que pour cette fonction $f'(0) = 0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

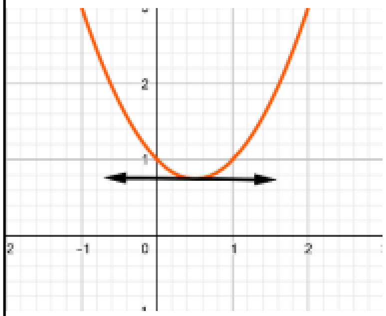
Propriété :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
>
> Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a



f admet un maximum relatif en a

x	.... $a-r$	a	$a+r$ ....
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$



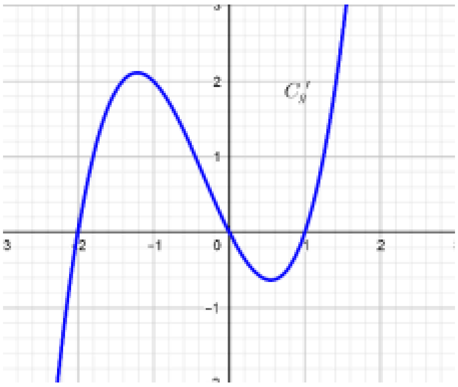
f admet un minimum relatif en a

x	.... $a-r$	a	$a+r$ ....
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Applications :

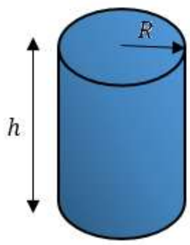
❶ Dresser le tableau de variation de la fonction : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

❷Soit la fonction g dont la fonction dérivée g' est représentée par la courbe ci-dessous : Dresser le tableau de variation de la fonction g



❸ **Problème d'optimisation**

Le but de cet exercice est de trouver les dimensions d'une boite cylindrique fabriquée par le minimum de matière première et de volume $1L$.



1. Déterminer la surface globale de la boite en fonction du rayon de sa base, R et de sa hauteur h.
2. Trouver une relation entre R et h,puis déterminer la surface globale de la boite en fonction de R seulement; on notera cette surface $S(R)$.
3. Dresser le tableau de variation de $S(R)$.
4. En déduire les dimension de la boite pour qu'elle soit fabriquée par le minimum de matière première.

On donne la définition suivante :

Définition

Soit a un nombre positif, le nombre positif b qui vérifie $b^3 = a$ s'appelle la racine cubique de a et se note :$\sqrt[3]{a}$

$$a \geq 0 \quad \text{et } b \geq 0 \qquad \text{on a} \quad \sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$$

IV) DERIVEES SUCCESSIVES.

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable on dit que la fonction f est deux fois dérivable et $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de la fonction f.

En générale on définit (sous réserve d'existence) les dérivées successives sur un intervalle ouvert I par :

L'initialisation : $\boldsymbol{f^{(0)} = f}$ et la formule de récurrence $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{f^{(n+1)}} = (\boldsymbol{f^{(n)}})')$

Exemple :

$f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$

$f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 36x^2 - 6x + 4$

$f'''(x) = 72x - 6$

$f^{(4)} = 72$

$(\forall n \geq 5)(f^{(n)} = 0)$

Exercice :

On veut déterminer dans cet exercice la dérivée d'ordre n de la fonction $h: x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Déterminer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 5 de la fonction h (Simplifier la fraction et ne pas calculer le produit des coefficients)
2. Conjecturer le résultats observé pour n dans $\mathbb{N}$.
3. Monter la conjecture.

V) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition :

Une **équation différentielle** est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On s'intéresse à l'équation $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété :

Les solutions de l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x$ où α et β sont des réels.

Il existe une seul solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x_0) = z_0 \end{cases}$ où x_0, y_0 et z_0 sont des réels

Application :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$
2. Déterminer la solution φ qui vérifie : $\begin{cases} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \left(\pi\right) \end{cases}$