

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) ACTIVITES ET RAPPELLES

1.1 Ensemble de définition

Activités 1:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

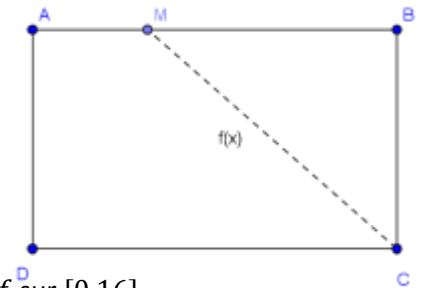
1. $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{3x^2+x-4}$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{\sqrt{x-x^2}}$
3. $h(x) = \frac{\tan x}{2\sin x+1}$
4. $k(x) = \frac{3x+1}{x-E(x)}$
5. $u(x) = \sqrt{E(x) - x}$
6. $v(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$.

Activité 2 :

Soit $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 5\text{cm}$ et $BC = 3\text{cm}$

M un point qui part de A et se déplace sans arrêt sur $ABCD$; considérons $f(x)$ la distance MC .

- 1- Calculer : $f(0), f(5), f(13)$ et $f(16)$.
- 2- a) Déterminer graphiquement les variations de f sur $[0,16]$.
b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,16]$.
c) Déterminer –suivant le tableau de variation- les extremums de la fonction f sur $[0,16]$.
- 3- Montrer que la restriction de f sur des intervalles de $[0,16]$, sont des fonctions affines et déterminer ses expressions.
- 4- Ecrire les expressions de $[0,5]$ et sur $[13,16]$.
- 5- a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x+16) = f(x))$
b) Déterminer $f(100), f(1000)$ et $f(2017)$.



Activité 3 :

$$\text{Soit } \begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{|x|-1} \end{aligned}$$

- 1- Déterminer $\mathcal{D}_f$.
- 2- Etudier la parité de f .
- 3- Donner la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.
- 4- Déterminer les variations de f sur $[0,1[$ sur $]1; 1+\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}, +\infty[$.
- 5- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

II) NOTIONS DE BASE

1) Ensemble de définition

Définition : (fonction)

On appelle **fonction numérique à variable réel** toute relation d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que chaque élément x de E à **au plus une image dans $\mathbb{R}$** .

Si $f(x) = y$ alors :

- y est l'image de x par la fonction f
- x est l'antécédent de y par la fonction f .

Définition :(Ensemble de définition d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réel de E dans $\mathbb{R}$, les éléments de E qui ont une image par f forment un ensemble qu'on appelle ensemble de définition de f et on le note : $\mathcal{D}_f$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exercice :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x+1}}$

Remarque :

Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f$, l'application définie de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$ s'appelle **l'application associée à la fonction f** .

2) Représentation graphique d'une fonction.**Définition :**(Graphe d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réel, **le graphe de la fonction f** est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$; on le note : $\mathcal{G}_f$.

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$$

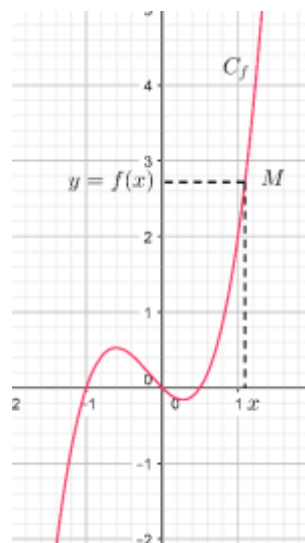
Si le plan est rapporté à un repère (souvent orthogonal), chaque couple du graphe de f peut être représenté par un point M , l'ensemble des points ainsi définie forme une **courbe** dans le plan qu'on appelle **la courbe représentative de la fonction f** , ou encore **la représentation graphique de la fonction f** on la note par : $\mathcal{C}_f$

Définition :

Le plan étant rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$.

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$$

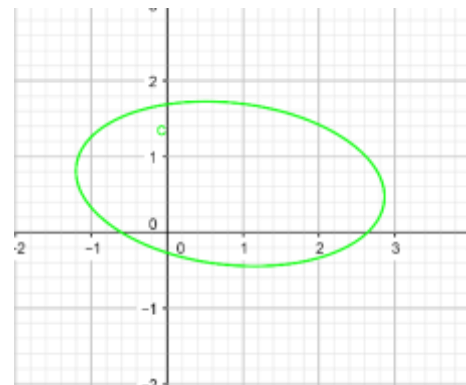
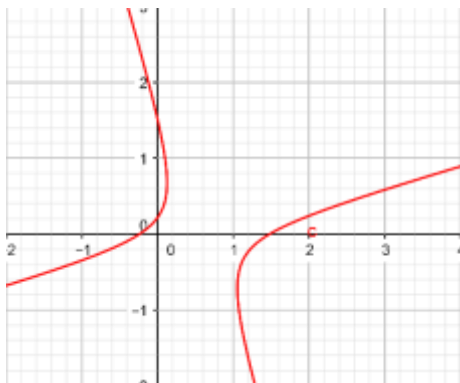
$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

**Remarque :**

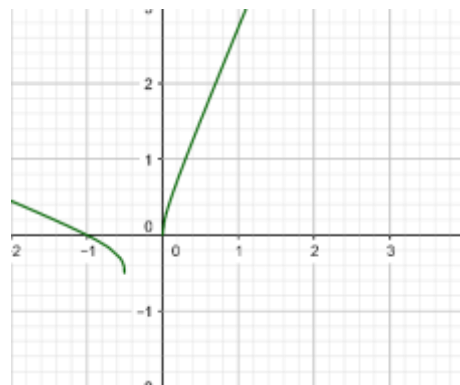
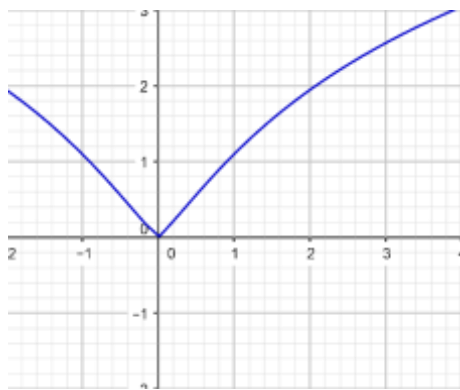
Pour qu'une courbe dans le plan soit une courbe d'une fonction numérique à variable réelle il faut et il suffit que **chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe cette courbe en au plus un point.**

Exemples :

Les courbes suivantes ne sont pas les courbes des fonctions numériques à variable réelle.



Les courbes suivantes sont les courbes des fonctions numériques à variable réelle.



III) FONCTIONS : PAIRE ; IMPAIRE ; PERIODIQUE

1) Activités :

Activité :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ où E désigne la partie entière.

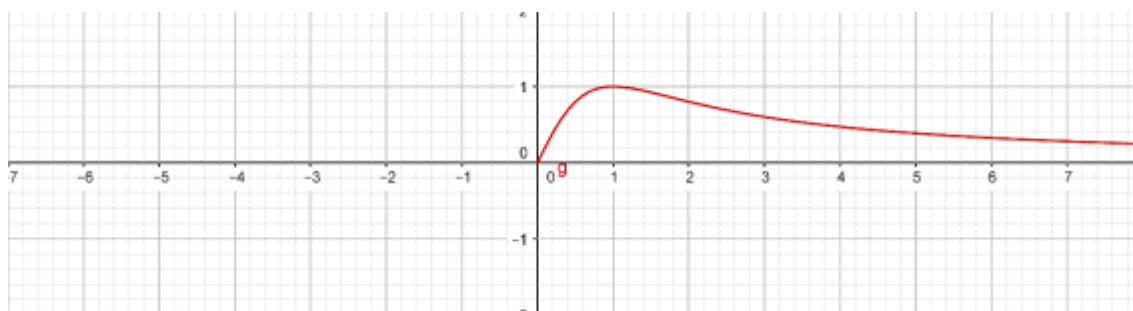
1- a) Supposons qu'il existe un réel T qui vérifie (P): $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + T) = f(x))$; montrer que $3T \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire la valeur p du plus petit réel strictement positif qui vérifie (P)

2- Inversement pour la valeur p trouvée en 1-b) : montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + p) = f(x))$

Activité 2 :

Compléter la courbe ci-dessous de la fonction h sachant que : $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.



Activité 3 :

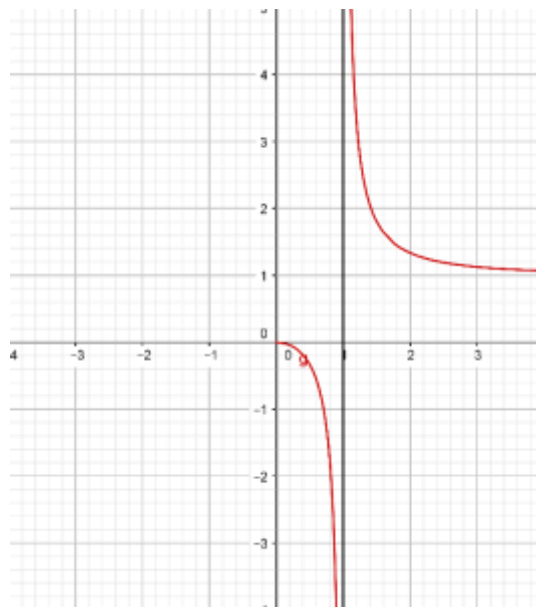
La courbe ci-contre est une partie de la courbe de la fonction

définie par : $h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

1- Déterminer l'ensemble définition de la fonction h

2- Déterminer la nature de h .

3- Compléter la courbe C_h

**2) Fonction paires, fonctions impaires****2.1 Fonction paire :****Définition :**

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , on dit que la fonction f est paire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Preuve : (en exercice)

2.2 Fonctions impaire :**Définition :**

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , on dit que la fonction f est impaire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Preuve : (en exercice).

3) Fonctions périodiques :**Définition :**

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , on dit que la fonction f est **périodique** s'il existe un réel T non nul qui vérifie :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x+T \in D_f \\ x-T \in D_f \end{cases} \right)$
- $(\forall x \in D_f)(f(x+T) = f(x))$

Tout réel T qui vérifie la définition s'appelle **une période de la fonction f** .

Le plus petit réel p **strictement positif** qui vérifie la définition s'appelle **la période de la fonction f** .

Exemples :

- Dans l'activité précédente : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ f est périodique de période $\frac{1}{3}$
- Soit la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

2- Montrer que la fonction g est périodique et déterminer sa période.

Propriété :

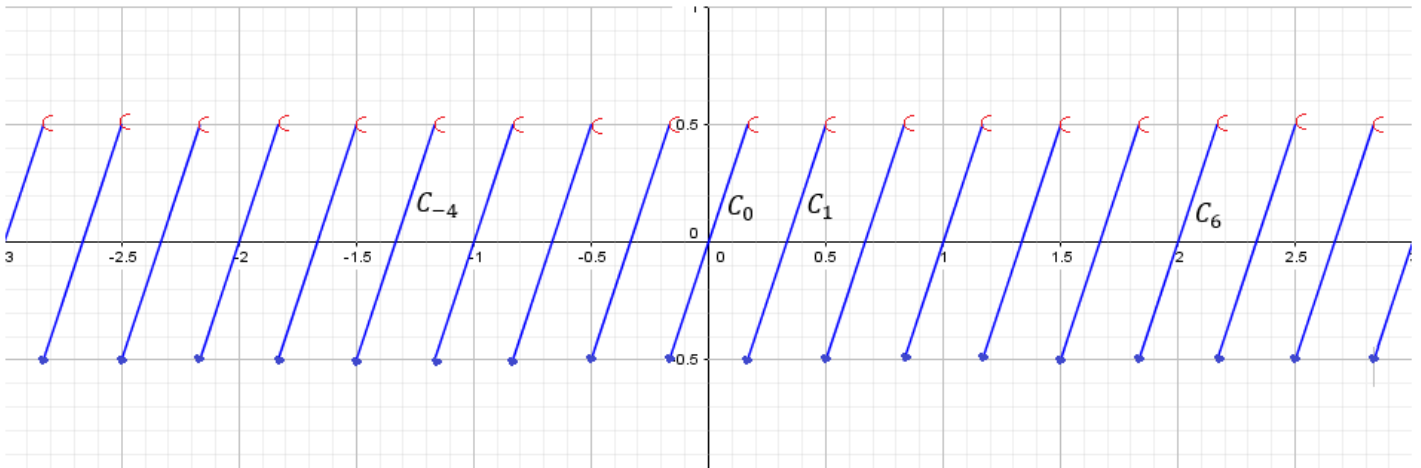
Si f est une fonction périodique de période T alors pour tout k dans $\mathbb{Z}$, kT est une période de f .

Exercice : Démontrer par récurrence sur k la propriété précédente.

Envisager deux cas : $k = n$ et $k = -n$ où n est un entier naturel.

Courbe d'une fonction périodique :

Activité : La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction $f(x) = 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ qui est périodique de période $\frac{1}{3}$



C_k est la courbe représentative de la restriction de la fonction f sur $D_k = \left[-\frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}; \frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}\right[$

- 1- Quelle est la longueur de D_k .
- 2- Déterminer graphiquement les transformations qui transforment C_0 en C_1 , en C_6 et $C_{(-4)}$
- 3- Conjecturer la transformation qui transforme C_0 en C_k .

Théorème :

Soit f une fonction périodique de période p et dont l'ensemble de définition D_f . On pose :

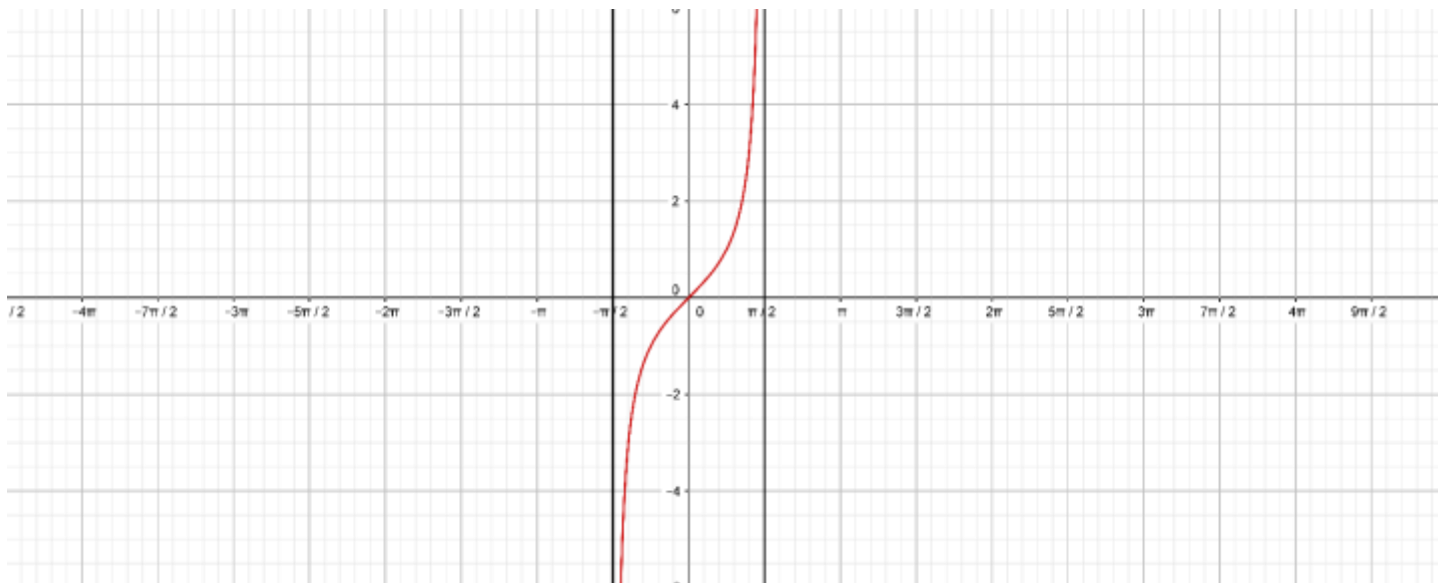
$D_k = [a_0 + kT, a_0 + (k+1)T[\cap D_f$ où a_0 est un élément de D_f et C_k la courbe de la restriction de f sur D_k .

C_k est l'image de C_0 par la translation t_k de vecteur $\vec{u}_k \begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$

Preuve : En exercice.

Remarque :

La courbe C_f est la réunion de toutes les courbes C_k où $k \in \mathbb{Z}$, $C_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$

Exercice :

La courbe ci-dessus est la courbe de la restriction de la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a montré que cette fonction est périodique de période π , continuer à tracer la courbe C_f sur $[-2\pi, 2\pi]$

IV) FONCTION MAJOREE, MINOREE, BORNEE**1) Activité**

Activité 1 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

En utilisant la forme canonique du trinôme f , montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq -1)$

Activité 2 :

Soit la fonction h définie par : $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h et étudier sa parité.

2- Construire la courbe de la restriction de h sur $[0, +\infty[$, puis construire C_f

3-Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) < 1)$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) > -1)$

4- La fonction h admet-elle un maximum absolu ?

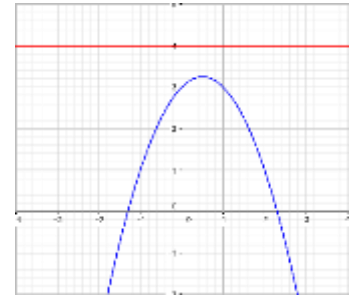
Définitions

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f , et D une partie de D_f .

- On dit que : f est **majorée** sur D si $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \leq M)$
- On dit que : f est **minorée** sur D si $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \geq m)$
- On dit que f est **bornée** sur D si elle est majorée et minorée sur D .

Remarque :

- Quand une fonction est majorée sur son ensemble de définition, on se contente de dire qu'elle est majorée.
- Un majorant M d'une fonction f sur D_f n'est pas nécessairement extremum absolu. Dans la courbe ci-contre 4 est un majorant de f mais pas un extremum absolu (Il n'y a pas de réel α qui vérifie que $f(\alpha) = 4$)



Exemple :

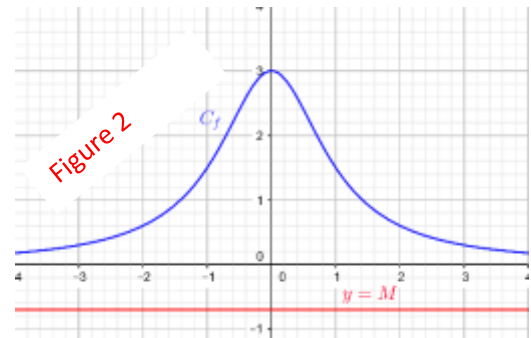
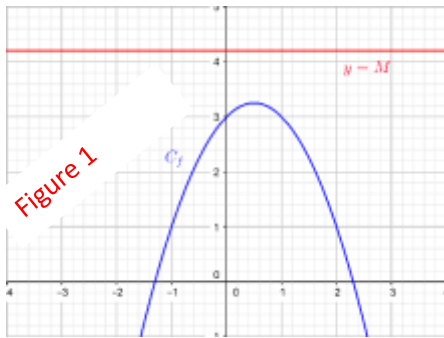
- La fonction h dans l'activité 2 est majorée par 1 et minorée par -1 .
 - La fonction f dans l'activité 1 est minorée.
- Montrer par absurde que f ne peut pas être majorée.

Propriété :

- Si f est une fonction majorée par M alors elle est majorée par tout nombre M' tel que : $M' \geq M$.
- Si f est une fonction minorée par m alors elle est minorée par tout nombre m' tel que : $m' \leq m$.

Interprétations géométriques :

- La courbe d'une fonction majorée par M est au-dessous de la droite $D: y = M$ (figure 1)
- La courbe d'une fonction minorée par m est au-dessus de la droite $D: y = m$ (figure 2)



Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f ; f est bornée si et seulement si :
 $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq \alpha)$

Preuve : (en exercice)

V) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1) Signe d'une fonction

Activité :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1$

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0)$

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , et D une partie de D_f .

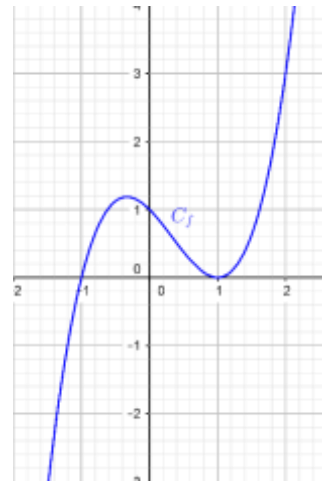
- On dit que : f est positive sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq 0)$.
- On dit que : f est négative sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \leq 0)$.

Remarque :

- Si f est positive sur D_f on dit que f est positive et on écrit : $f \geq 0$
- Si f est négative sur D_f on dit que f est négative et on écrit : $f \leq 0$
- Une fonction positive est minorée par 0, par contre une fonction négative est majorée par 0.

Exemple :

Sur la courbe ci-contre la fonction f change de signe :
 f est négative sur $] -\infty, -1]$ et positive sur $[-1, +\infty[$



Définition :

Soient f et g deux fonctions dont les domaines de définitions sont respectivement D_f et D_g et D une partie commune entre D_f et D_g ($D \subset D_f \cap D_g$)

On dit que f est plus grande que g sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq g(x))$ et on écrit $f \geq g$ sur D

Interprétation géométrique :

Si $f \geq g$ sur D alors C_f est au-dessus de C_g

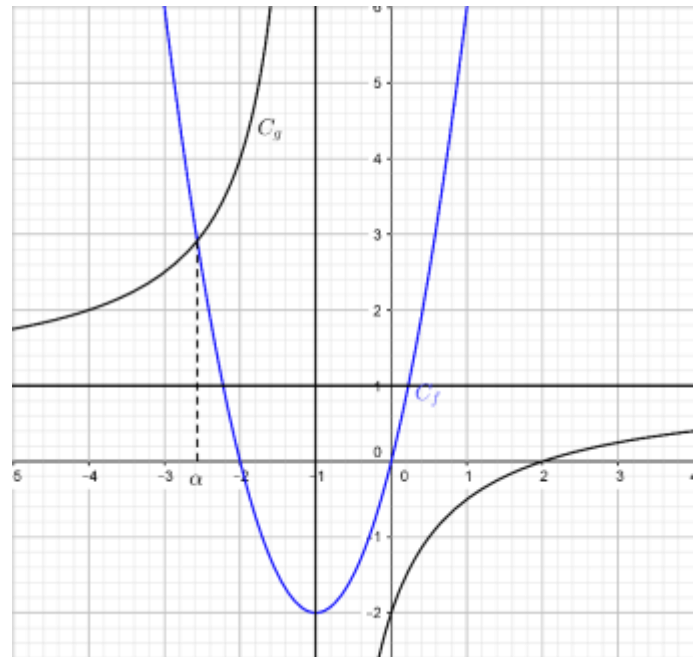
Exemple :

Sur la figure ci-contre C_f est la courbe de la fonction

$f(x) = 2x^2 + 4x$ et C_g est la courbe représentative de

la fonction $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- Sur $[\alpha, -1[$ on a : $g \geq f$.
- Sur $] -\infty, \alpha] \cup] -1, +\infty[$ on a $f \geq g$



Exercice :

Considérons les fonctions $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$

2- Construire les courbes C_f et C_g

3- Nous définissons le réel $\text{Sup}(a, b)$ par : $\text{Sup}(a, b) = a$ si $a \geq b$.

Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \sup(f(x), g(x))$$

- a) Donner une expression de h en fonction de x
- b) Construire la courbe représentative de h .

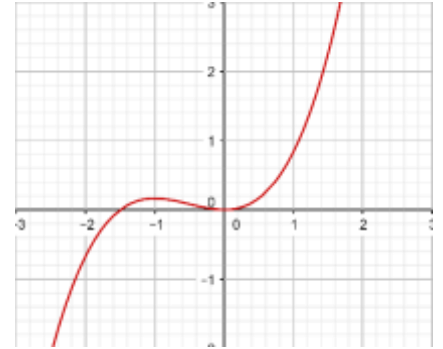
VI) VARIATION D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

1) Activités et définition.

Activité1 :

A partir de la courbe ci-contre d'une fonction f ,

- 1-Déterminer la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty, -1]$; $[-1, 0]$ et sur $[0, +\infty[$
- 2-Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3-Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.



Activité 2 :

Soit la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x^2 + x - 2|$

- 1- Ecrire des expressions de la fonction g sans la valeur absolue.
- 2- Etudier la monotonie de la fonction g
- 3- Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- 4- Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.

Activité 3 :

Soit la fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 4x + 1$

Montrer que la fonction h n'admet pas de maximum absolu.

Définitions : (Monotonie d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est D_f . I un intervalle de D_f .

- On dit que : f est **croissante** sur I si : $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
- On dit que : f est **strictement croissante** sur I si : $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$
- On dit que : f est **décroissante** sur I si : $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
- On dit que : f est **strictement décroissante** sur I si : $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$
- On dit que f est **monotone** sur l'intervalle I s'il est croissante ou bien décroissante sur I .
- On dit que f est **strictement monotone** sur l'intervalle I s'il est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur I .

2) Taux de variation d'une fonction

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f . a et b deux éléments distincts de I ; le nombre $T_{(a,b)} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle **le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b** .

Théorème :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f .

- la fonction f est **croissante** sur I si et seulement si $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \geq 0)$
- la fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \leq 0)$

Preuve : En exercice

Exercices :

- 1- Etudier la monotonie de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2- Etudier la monotonie de la fonction $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $[0,1]$ et sur $[1, +\infty[$

2.2 Monotonie et parité :**Propriété :**

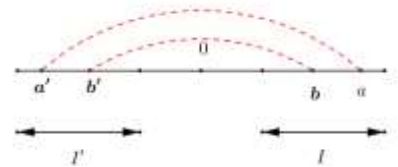
- Soit f une fonction **paire** dont le domaine de définition est D_f , I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
 - si f est croissante sur I alors elle est décroissante sur I'
 - si f est décroissante sur I alors elle est croissante sur I'
- Soit f une fonction **impaire** dont le domaine de définition est D_f , I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
 - si f est croissante sur I alors elle est croissante sur I'
 - si f est décroissante sur I alors elle est décroissante sur I'

Preuve :

On suppose que f est paire : soit I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.

Soient a' et b' deux éléments de I' alors il existe a et b dans I tels que $a' = -a$ et $b' = -b$

$$\begin{aligned}
 T_{f_{I'}} &= \frac{f(a') - f(b')}{a' - b'} = \frac{f(-a) - f(-b)}{(-a) - (-b)} \\
 &= \frac{f(a) - f(b)}{-(a-b)} \quad (\text{car } f \text{ est paire}) \\
 &= -T_{f_I}
 \end{aligned}$$

**3) Extremums****3.1 Extremums absolues**

Activité : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$; Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$

Définition :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un maximum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$. On écrit : $\max_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$
- On dit que f admet un minimum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$. On écrit : $\min_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$

Remarque :

Si f admet un maximum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un majorant de f .

Si f admet un minimum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un minorant de f

3.2 Extremums relatifs

Activité : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- 1- Etudier la parité de la fonction g .
- 2- Etudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$ et sur $[1, +\infty[$
- 3- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

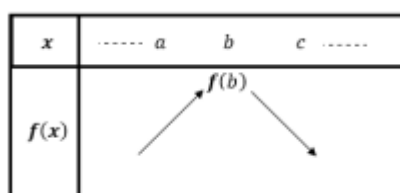
Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un **maximum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$.
- On dit que f admet un **minimum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$.

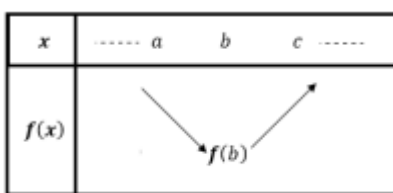
Propriété :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a , b et c trois éléments de D_f tels que $a < b < c$ et $[a, c] \subset D_f$

- Si f est croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$ alors f admet un **maximum relatif en b**
- Si f est décroissante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, c]$ alors f admet un **minimum relatif en b**



f admet un maximum relatif en b

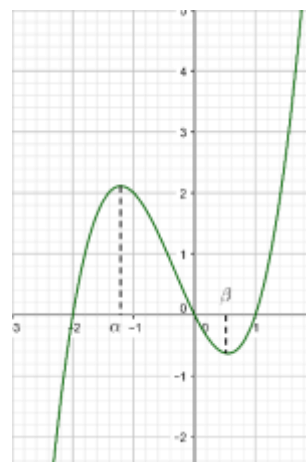


f admet un minimum relatif en b

Interprétation géométrique :

Sur la figure ci-contre on a :

f admet un maximum relatif en α
et admet un minimum relatif en β

**VII) ETUDE DES FONCTIONS USUELLES (RAPPELLES)****1) $f(x) = ax^2 + bx + c$** **Propriété :**

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme ($a \neq 0$)

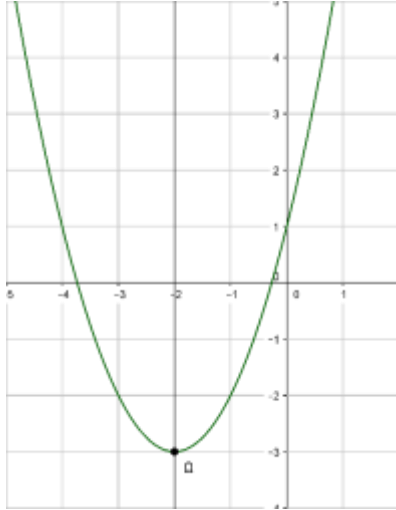
- En posant $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ on obtient pour tout réel x ; $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ c'est la forme canonique du trinôme $f(x)$.
- La courbe C_f est l'image de la courbe de la fonction $g(x) = ax^2$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$.
- La courbe C_f dans un repère orthogonal est **une parabole de sommet $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'axe la droite $(\Delta): x = \alpha$**

Les variations de f et sa représentation graphique peut être définies suivant le signe de a comme suite :

En posant $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

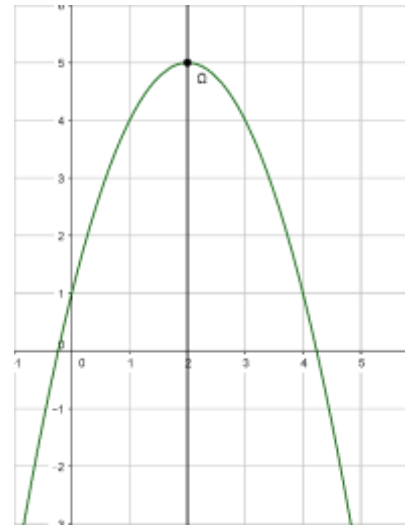
Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$



2) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Propriété :

Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Ils existent trois réels α , β et γ tels que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

La courbe C_f est l'image de la courbe (Γ) représentative de la fonction $x \rightarrow \frac{\gamma}{x}$ par la translation t de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$. La courbe C_f dans un repère orthogonal est une hyperbole de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'asymptotes les droites $(\Delta): x = \frac{-d}{c}$ et $(\Delta'): y = \frac{a}{c}$.

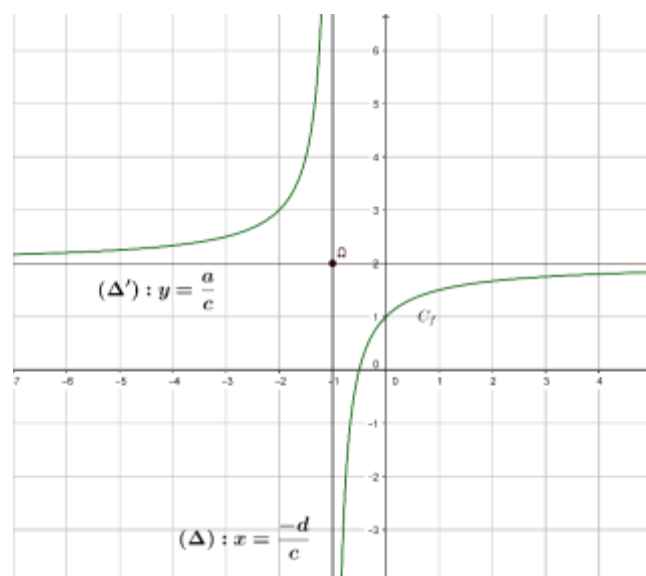
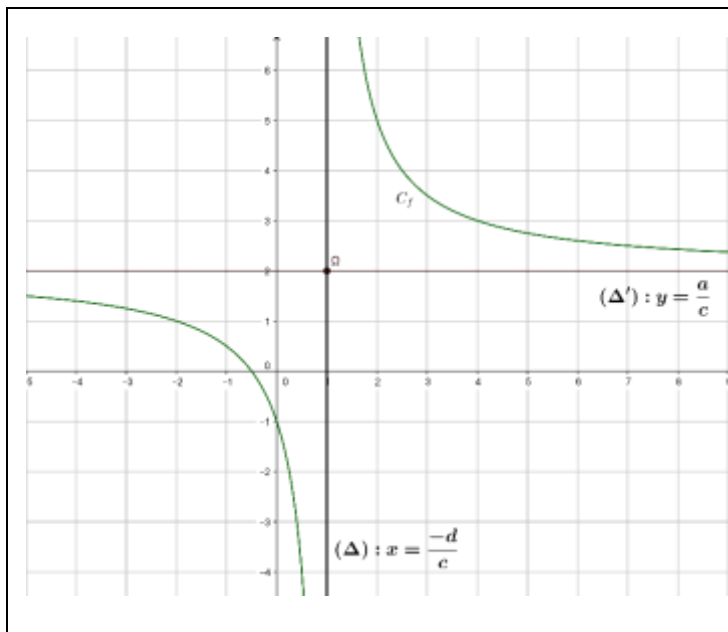
Pour les variations de f on envisage les deux cas suivants :

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$+\infty$

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$



3) $f(x) = \sqrt{ax + b}$

Activité :

Soit g la fonction définie par : $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{ax + b}$ où $a \neq 0$

- 1- Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble de définition de g .
- 2- Déterminer le taux d'accroissement de la fonction g en deux réels x_1 et x_2 de D_g
- 3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de la fonction g .

Propriété :

$a > 0$

x	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$h(x)$	0	$+\infty$



$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$
$h(x)$	$+\infty$	0



4) $f(x) = ax^3$

Activité :

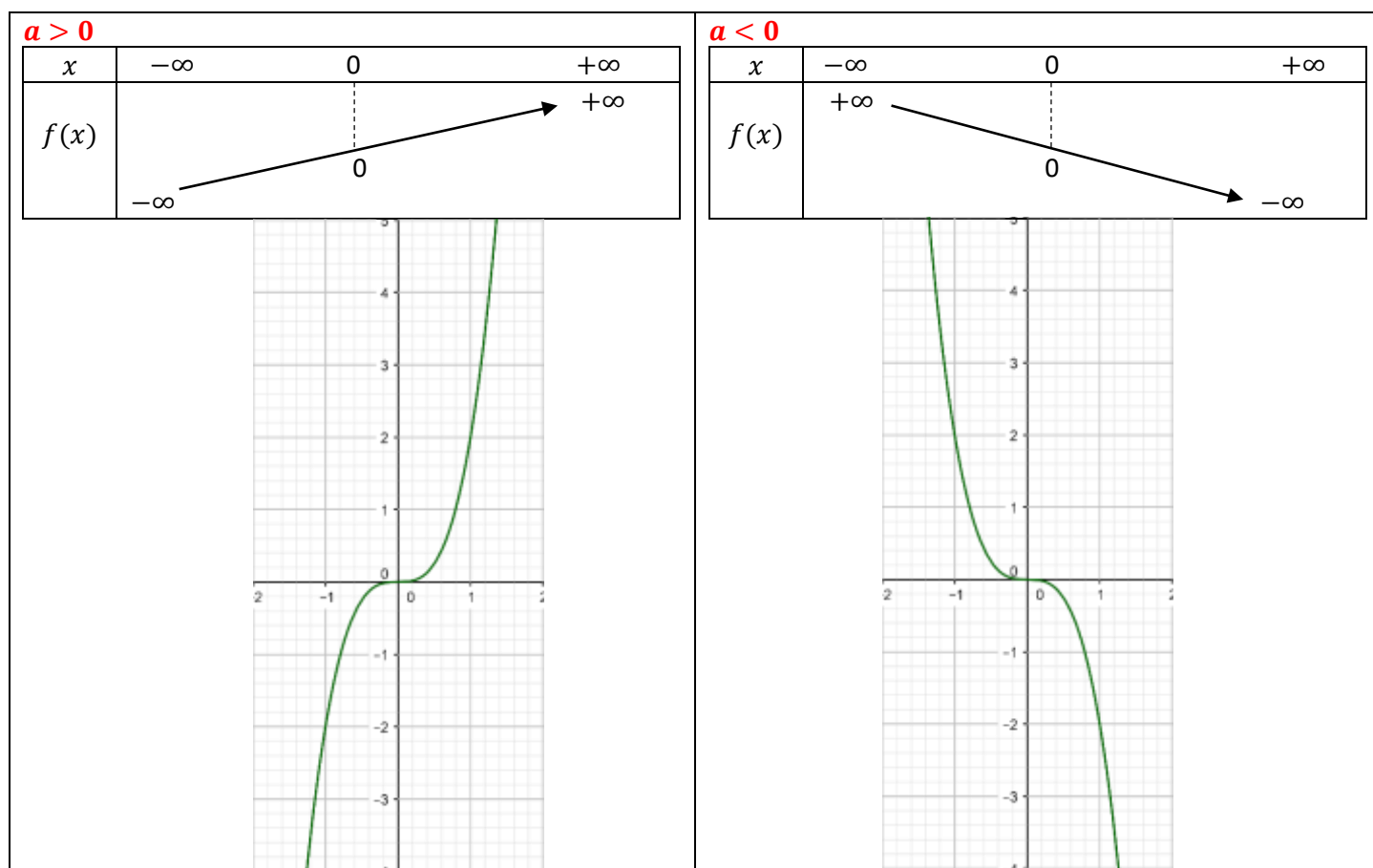
Soit h la fonction définie par : $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto ax^3$ où $a \neq 0$

- 1- Montrer que h est une fonction impaire.

2- Montrer que le signe du taux d'accroissement de h sur $\mathbb{R}^+$ est le signe de a

3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de h

Propriété :



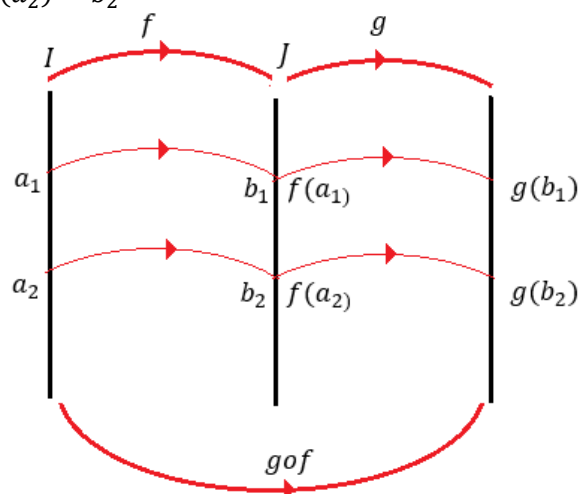
VIII) MONOTONIE DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTION.

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I un intervalle de D_f et J un intervalle de D_g tels que : $f(I) = J$

Soient a_1 et a_2 deux éléments de I tels que : $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$

On a :

$$\begin{aligned}
 T_{g \circ f} &= \frac{(g \circ f)(a_1) - (g \circ f)(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(f(a_1)) - g(f(a_2))}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= T_g \times T_f
 \end{aligned}$$



Propriété :

Soient f et g deux fonctions dans les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I un intervalle de D_f et J un intervalle de D_g tels que $f(I) = J$

- Si f est **croissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .
- Si f est **décroissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .
- Si f est **croissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .
- Si f est **décroissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

Exercice 1 :

Soient les fonctions : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ et $h = f \circ g$

- 1- Exprimer $h(x)$ en fonction de x .
- 2- Déterminer D_h ensemble de définition de h .
- 3- Dresser les tableaux de variation de f et g .
- 4- En déduire les variations de h .

Exercice 2 :

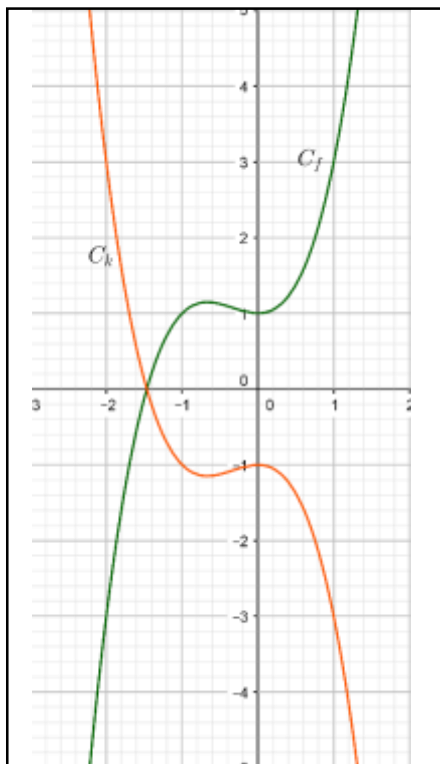
Soit la fonction $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

- 1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(u(x) = (v \circ t)(x))$ où $t(x) = -x^2 + 2x$ et $v(x) = x^2 + 2x + 3$
- 2- Dresser les tableaux de variation de v et t
- 3- En déduire les variations de u .

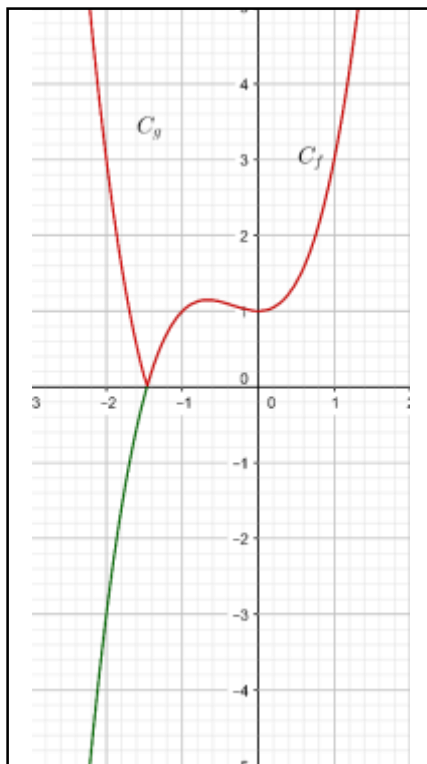
IX) REMARQUES SUR LES GRAPHS.**1) Nombre de solution de l'équation $f(x) = k$**

Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f . Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ est le nombre de points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $(\Delta): y = k$.

Soit f une fonction numérique dont la courbe représentative C_f

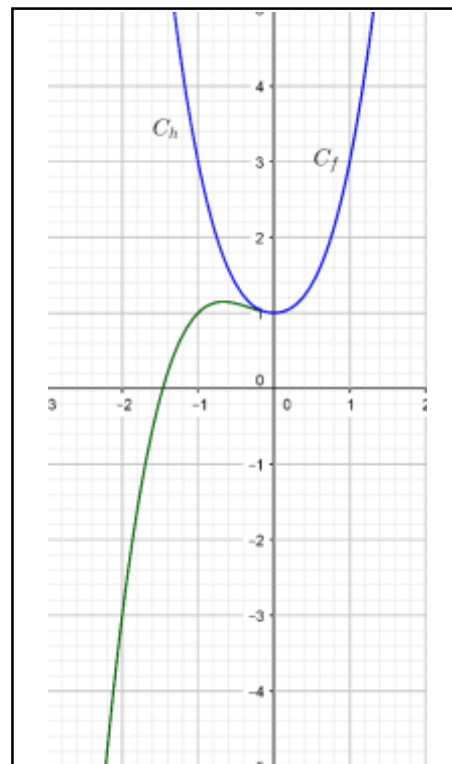


$k(x) = -f(x)$
 C_k et C_f sont symétrique
 par rapport à l'axe (Ox)



$g(x) = |f(x)|$

- Si $f(x) \geq 0$ alors
 $g(x) = f(x)$ et dans ce cas
 C_g et C_f seront confondues.
- Si $f(x) \leq 0$ alors
 $g(x) = -f(x)$ et dans ce
 cas C_g et C_f seront
 symétriques par rapport à
 l'axe (Ox)



$h(x) = f(|x|)$

Si $x \geq 0$ alors
 $h(x) = f(x)$ et dans ce
 cas C_h et C_f sont
 confondues.

La fonction h étant paire alors
 C_h est symétrique par rapport à
 l'axe (Oy)