

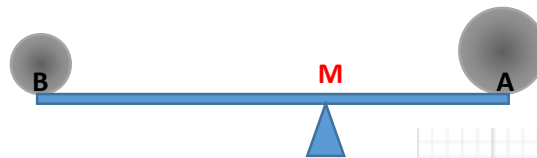
BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 :

Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de $500 g$ en A et de $350 g$ en B . M un point sur la barre.

Déterminer la position de M sachant que le système est en équilibre.



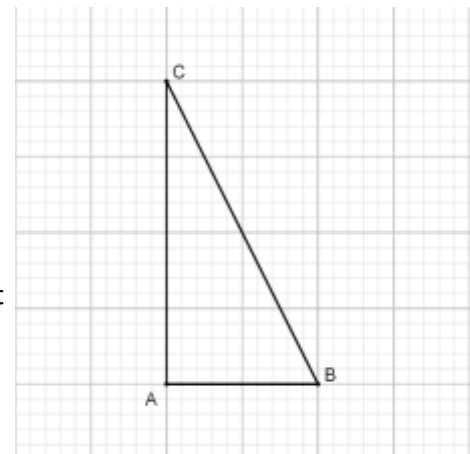
Activité 2 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\vec{AG} - 3\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point G .

3- Si le plan est rapporté au repère (A, \vec{AB}, \vec{AI}) où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G .



Activité 3 :

Soit $(A_i)_{i \leq 4}$ une famille de 4 points, et $(\alpha_i)_{i \leq 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle. Montrer que l'application :

$$\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \sum_{i=1}^4 \alpha_i \vec{MA}_i$$

est une bijection. L'application φ s'appelle **l'application de Leibniz**

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions :

- Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un **point pondéré**.
- Plusieurs points pondérés constituent un **système pondéré**

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ l'application

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_2(G) = \vec{0}$

$$\varphi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha \vec{AM} + \beta \vec{BM}$$

Preuve : φ_2 est l'application de Leibniz pour deux points

Définition :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

On écrit : $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ et par suite : pour tout réel k non nul on a : $k\alpha \overrightarrow{AG} + k\beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

et donc $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

- Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'**isobarycentre de A et B** qui n'est que la milieu du segment $[AB]$.

• **Construction :**

Construire $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$

- Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc : $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

par suite : $\alpha \overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{OG} + \beta \overrightarrow{BO} + \beta \overrightarrow{OG} = \vec{0}$ où O est un point quelconque dans le plan (\mathcal{P})

d'où : $(\alpha + \beta) \overrightarrow{OG} + \alpha \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

on conclut que : $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$. (car $\alpha + \beta \neq 0$)

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Pour tout point O du plan (\mathcal{P}) on a : $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$.

Cette propriété s'appelle la **propriété caractéristique** du barycentre.

Propriété :

Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve :

Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant $A = O$ dans la propriété ; On aura $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété :

Le plan (\mathcal{P}) et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) x_B \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) y_B \end{cases}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre.

Exercice :

Considérons les applications $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x$ définies sur \mathbb{R} soient C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour tout x dans \mathbb{R} , on pose M_x le point de C_f d'affixe x et N_x le point d'affixe x de C_g .

- 1- Déterminer les coordonnées du point G_x isobarycentre de M_x et N_x .
- 2- Déterminer et tracer l'ensemble dans lequel varie G_x quand x varie dans \mathbb{R} .

3) Barycentre de trois points pondérés**3.1 Définition****Propriété :**

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'application :

$\varphi_3: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$$M \mapsto \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_3(G) = \vec{0}$

c est à dire : $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} + \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

Preuve : φ_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

On a pour tout point O du plan (\mathcal{P}) : $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OC}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précédent.

Propriété :

Le plan (\mathcal{P}) et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soient $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_C \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_C \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :

Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
 Alors : $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Application :

Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1)\}$

Cas particulier

Si les poids $\alpha; \beta$ et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC .

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

- 1- Réduire l'écriture de \vec{u} .
- 2- Montrer que le vecteur \vec{v} est constant.
- 3- Déterminer l'ensemble des points M tel que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires.

Exercice 2 :

Déterminer les ensembles suivants :

$$\Delta = \{M \in (\mathcal{P}) / \|4\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\|\}$$

$$\Gamma = \{M \in (\mathcal{P}) / \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|\}$$

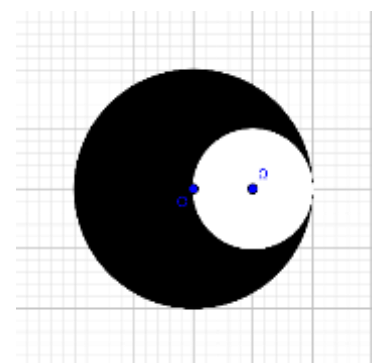
Exercice 3 :

Le solide (S) est constitué d'un disque (\mathcal{D}) dont on a enlevé le disque (\mathcal{D}')

(\mathcal{D}) est le disque de centre O et de rayon $2R$

(\mathcal{D}') est le disque de centre Ω et de rayon R

Déterminer et tracer le centre de gravité du solide.



5) Barycentre de quatre points pondérés

3.1 Définition

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ l'application :

$$\varphi_4: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} + \delta\overrightarrow{DM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_4(G) = \vec{0}$

Preuve : φ_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ On a pour tout point O du plan (\mathcal{P}) :

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{S}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{S}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{S}\right) \overrightarrow{OC} + \left(\frac{\delta}{S}\right) \overrightarrow{OD} \text{ où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété :

Le plan (\mathcal{P}) et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soient $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$ et $D(x_D, y_D)$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) x_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) x_D \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) y_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) y_D \end{cases} \quad \text{Où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = \text{Bar}\{\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}; (C, \gamma); (D, \delta)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$

Si $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Montrer que : $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

Propriété :

Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$

Si $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Application :

$ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

Cas particulier

Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$ s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère $ABCD$.

Exercice :

Déterminer des poids α , β , γ et δ pour les points A, B, C et D pour que $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ dans la figure ci-dessous

