

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Formules de transformations

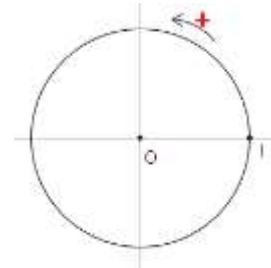
1) RAPPELLES

1) Cercle trigonométrique

Définition:

Le cercle trigonométrique est un cercle:

- de centre O l'origine du plan
- de rayon $R = 1$
- orienté une orientation positive.
- et admet une origine I



2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T

Soit (C) le cercle trigonométrique d'origine I ; considérons l'intervalle $] -\pi, \pi]$

tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI) . Si on fait enrouler

le segment qui représente $] -\pi, \pi]$ au tour du cercle (C) on remarque que

chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $] -\pi, \pi]$ s'associe avec un point unique

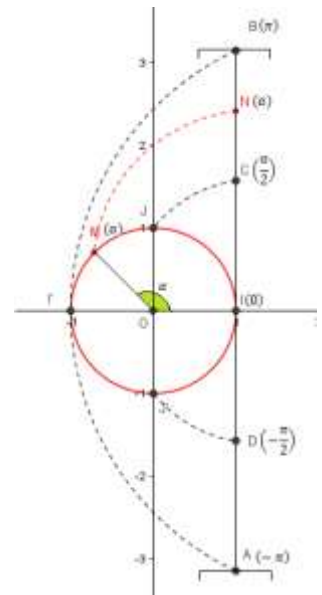
M du cercle trigonométrique.

Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $] -\pi, \pi]$, alors il existe un point M unique

de (C) qui s'associe avec le point $N(\alpha)$.

Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $[\widehat{IOM}]$.



1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique (C) d'origine I . (Δ) est la droite

passante par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ .

Soit M un point sur le cercle (C) et d'abscisse curviligne principale α .

Si on suppose que la droite (Δ) est un fil qu'on peut enrouler autour du cercle (C)

on remarque que la point M du cercle (C) coïncide avec une infinité de points de

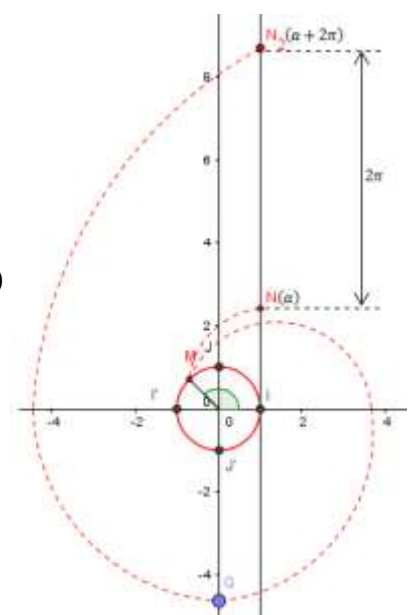
la droite (Δ) ; et qui ont pour abscisses

$\dots (\alpha - 6\pi), (\alpha - 4\pi), (\alpha - 2\pi), (\alpha), (\alpha + 2\pi) \dots$

En générale: chaque point N_k de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M

aura pour abscisse $\alpha + k2\pi$

Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (C) .



Définition :

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α . Les réels qui s'écrivent de la forme

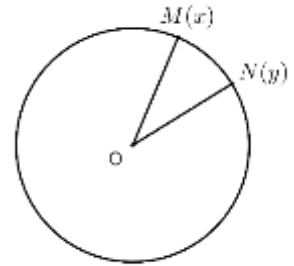
$\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x - y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Exercice :

Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectifs x et y .



- 1- Calculer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.
- 2- En déduire $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- 3- Calculer $\cos(x + y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y .
- 4- Calculer $\sin(x + y)$ et $\sin(x - y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y .

Propriété :

Pour tous réels x et y on a :

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad (1)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (2)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (3)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad (4)$$

Applications :

Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) Formules d'angle double.

D'après ❶ ligne (2) on a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x && \text{et on sait que } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

D'après ❶ ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Propriété :

Pour tous réels x et y on a :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$$

$$= 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x \quad (3)$$

3) Formules du demi-angle.

D'après 2 ligne (1) et (2) on a :

Propriété :

Pour tous réels x et y on a :

$$\textcircled{3} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (2)$$

Application :

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

D'après 2

Propriété :

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (1)$$

$$\textcircled{4} \quad = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

4) Formules du tangente.

Soient x et y deux réels tels que : $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan(x + y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \quad \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors : } \cos x \cdot \cos y \neq 0 \\ &= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{On en déduit que : si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Si } (x - y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{aligned}$$

Propriété :

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

5

- Si $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ (1)
- Si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ alors : $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (2)
- Si $(x - y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ (3)

Exercice :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

➤ D'après 5 (2) et si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\tan(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ on en déduit : } \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

➤ D'après 4 (1) on a : $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ et on sait : $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
par suite :

$$\cos(x) = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \quad \text{si } x \neq \pi + 2k\pi \text{ alors : on peut conclure que : } \cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ on en déduit : } \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

➤ D'après 4 (3) on a : $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ si $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\text{alors on peut conclure que : } \sin(x) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{d'où : } \sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ on en déduit : } \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Propriété :

Soit x un réel tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ on a :

6

- $\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ (1)
- $\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$ (2)

Si de $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

- $\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$ (3)

Exercice :

1- Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation : (E): $2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E) (remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$)

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété ❶ et de (1)+(2) on peut conclure que : $\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x \cdot \cos y$

Si on pose : $\begin{cases} x - y = p \\ x + y = q \end{cases}$ alors on peut déduire : $\begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}$

On peut conclure que : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété ❶ et de (1)-(2) on peut conclure que : $\cos(x - y) - \cos(x + y) = -2\sin x \cdot \sin y$

Si on pose : $\begin{cases} x - y = p \\ x + y = q \end{cases}$ alors : $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété :

Pour tous réels p, q , on a :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

7

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété ❶ et de (1)+ (2) on peut conclure que : $\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x \cdot \cos y$ d'où :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété :

Pour tous réels x, y on a :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

8

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Exercices :

1- Linéariser : $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\cos x = a$

Propriété :

Considérons l'équation $(E) \cos x = a$ où a est un réel :

- si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $\cos x = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0, \pi[$ qui vérifie $\cos \alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou} \begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = -B(x) + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercices :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$
Déterminer les solutions dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$

1.2 $\sin x = a$

Propriété :

Considérons l'équation $(E') \sin x = a$ où a est un réel :

- si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $\sin x = 1$ sont les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $\sin x = -1$ sont les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $\sin \alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou} \begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercices :

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
Déterminer les solutions dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$

1.3 $\tan x = a$ **Propriété :**

Pour tout réel a , il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $\tan \alpha = a$,

et l'équation **$\tan x = a$** aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation :

$$A(x) = B(x) + k\pi$$

Exercices :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

2) L'équation : (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Si $abc = 0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{Or : } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \text{ donc :}$$

Il existe un réel φ tel que :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cdot \cos x + \sin \varphi \cdot \sin x) \text{ et d'après la formule d'addition} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x - \varphi)) \end{aligned}$$

2.2 L'équation : (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$$a\cos x + b\sin x + c = 0 \Leftrightarrow a\cos x + b\sin x = -c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x - \varphi)) = -c \quad \text{où : } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{ça revient à l'étude d'une équation usuelle.}$$

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ on a :

Pour tout réel x : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x - \varphi))$ où le réel φ est déterminé par :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

L'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ se ramène à : $\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES**1) Rappelles****1.1) Inéquations avec cos**

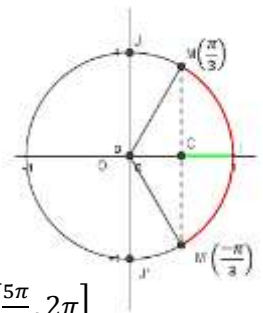
Considérons l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Tout d'abord il faut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ les images des solutions de cette équation sont

$M(\frac{\pi}{3})$ et $M'(-\frac{\pi}{3})$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sont les abscisse

curvilignes des points qui se situent sur l'arc $[M'IM]$ (en rouge sur la figure)

et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi, \pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $S_{[0, 2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$



Exercice : Résoudre dans $[0, 3\pi]$ l'inéquation $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

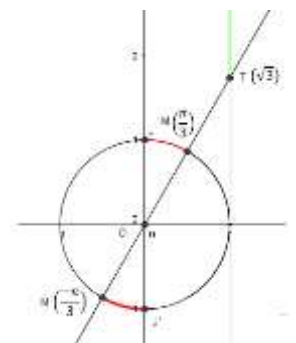
En utilisant les démarches du paragraphe précédent résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$

puis déterminer les solution dans $[0, 3\pi]$.

1.3) Inéquation avec tan

Pour résoudre l'inéquation (E_3) $\tan x \geq \sqrt{3}$ on suit les étapes suivantes :

- Il faut remarquer que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- résoudre l'équation $\tan x = \sqrt{3}$:
l'ensemble de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
- On place le point $M(\frac{\pi}{3})$ sur le cercle trigonométrique.
- On trace la droite (OM)
- On détermine sur le cercle les arcs qui contiennent les points dont les abscisses curvilignes vérifient l'inéquation (E_3)



L'ensemble de solutions de l'inéquation (E_3) dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est $S_{[-\pi, \pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$.

Exercice : déterminer les solutions de (E_3) dans l'intervalle $[0, 4\pi]$.

Exercice : Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ puis dans $[0, 3\pi]$ l'inéquation $\tan x \leq -1$

1.4) Inéquations dont la solution se ramène à la résolution d'une inéquation usuelle.

1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{-1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$
3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice :

Résoudre dans $\left[\frac{-11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}\right]$ l'équation $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$