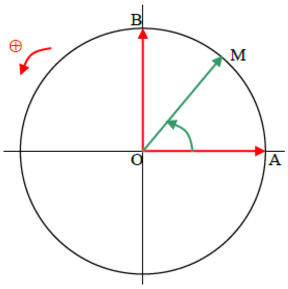
CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Formules de transformations

I) RAPPELLES

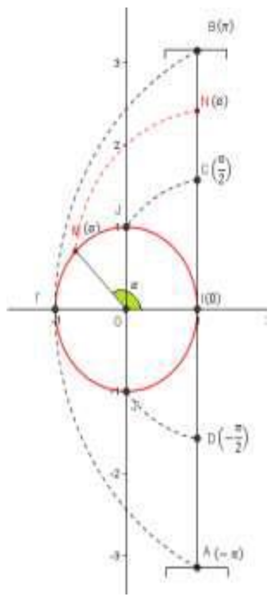
1) Cercle trigonométrique

Définition : Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O l'origine du plan de rayon $R = 1$ orienté une orientation ositive. et admet une origine I



2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T



Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I; considérons l'intervalle $]-\pi,\pi]$ tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI). Si on fait enrouler le segment qui représente $]-\pi,\pi]$ au tour du cercle $(\mathcal{C})$ on remarque que chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'associe avec un point unique M du cercle trigonométrique.

Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$, alors il existe un point M unique de $(\mathcal{C})$ qui s'associe avec le point $N(\alpha)$. Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $\left[\widehat{IOM}\right]$

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'origine I.
(Δ) est la droite Passant par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ.
Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α.
Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle $(\mathcal{C})$
on remarque que la point M du cercle $(\mathcal{C})$ coïncide avec une infinité de points de la droite (Δ); et qui ont pour abscisses
$\ldots\,.\,(\alpha-6\pi),(\alpha-4\pi),(\alpha-2\pi),(\alpha),(\alpha+2\pi)\ldots\,..$
En générale : chaque point Nk de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M aura pour abscisse $\alpha+k\mathbf{2\pi}$
Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

Définition : Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale $\boldsymbol{\alpha}$. Les réels qui s'écrivent de la forme : $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ où $\boldsymbol{k}$ est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x-y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Activité : Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes Respectifs x et y.

1- Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.

2- En déduire $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

3- Calculer $\cos(x+y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

4- Calculer $\sin(x+y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

Propriété1 : Pour tous réels x et y on a :

$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$ (1)

$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$ (2)

$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$ (3)

$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$ (4)

Exemple : 1)Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin(x+\dfrac{2\pi}{3})+\sin(x-\dfrac{2\pi}{3})+\sin x=0$

Solution :

1) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3)($\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$??

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

4) $\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$$

Exercice1 :

Soient : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ et $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ et $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1)Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

on a $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\cos^2 b=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ou }\cos b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

calcul de : $\sin a$

on a : $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
$\cos x$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**

donc : $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ donc $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

or $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) on a : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Donc : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

Exercice2 : Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

2) Formules d'angle double.

D'après propriété1 ligne (2) on a :

$cos(2x) = cos^2x - sin^2x$ et on sait que $cos^2x + sin^2x = 1$

$cos(2x) = = 2cos^2x - 1$

$cos(2x) = = 1 - 2sin^2x$.

D'après Propriété1 ligne (3) on a :

$sin(2x) = 2sinx.\,cosy$

Propriété2 : Pour tout réel x on a :

$cos(2x) = 2cos^2x - 1$ (1)

$cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ (2)

$sin(2x) = 2sinx.\,cosx$ (3)

Exemple :calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4}=2\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$

D'après : $cos(2x) = 2cos^2x - 1$ (1)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D'après : $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ (2)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice3 : Sachant que $\sin x=\frac{1}{2}$ et $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

Donc : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

Et on a : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ donc : $\cos^2 x=\frac{8}{9}$

donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

or $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$

donc : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}$

Exercice4 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2\ \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

3) Formules du demi-angle.

D'après : propriété2 ligne (1) et (2) on a :

Propriété3 : Pour tous réels x et y on a :

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\quad(1)$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad(2)$$

D'après propriété2

Propriété4 : $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$ (1)

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) $\qquad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Exemple : montrer que :

1) $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2)si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sin\alpha\neq-1$ alors

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solution :

1)on a : $1-\cos x+\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Car : $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) on a : $1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice5 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Solution :

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12(1-\sin^2 x)=-10\sin^2 x+12$

$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$

4) Formules de la tangente.

Soient x et y deux réels tels que: $(x+y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ on a

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $\cos x.\cos y\neq 0$

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\times\tan y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

On en déduit que : si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Si $(x-y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\times\tan y}$$

Propriété 5: Soient x et y deux réels tels que :

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ on a :

1) Si $(x+y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\times\tan y}$ (1)

2) si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2)

3) Si $(x-y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors :

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\times\tan y}$ (3)

Applications : Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt3}}{1+\frac{1}{\sqrt3}}=\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=2-\sqrt3$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt3}}{1-\frac{1}{\sqrt3}}=\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}=2+\sqrt3$$

Exercice6 : Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$

Exercice7 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+2x-1=0$

2- En déduire $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) utiliser le déterminent Δ

2) utiliser : $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x=\frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de :

$t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) D'après Propriété 5 (2) et si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\pi+2k\pi$

$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$

on en déduit : $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

2) D'après Propriété 4 (1) on a : $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$

et on sait : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

par suite : $\cos x=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1$

si $x\neq\pi+2k\pi$ alors : on peut conclure que :

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

On posant $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

D'après Propriété 4 (3) on a : $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

si $x\neq\pi+2k\pi$

Alors on peut conclure que : $\sin x=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

d'où : $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on

en déduit : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

Propriété 6: Soit x un réel tel que : $x\neq\pi+2k\pi$ on a :

1) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)

2) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ (2)

Si de $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\pi+2k\pi$

3) $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Application: soit $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2}=-\frac{1}{3}$

$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2}=-2\sqrt{2}$

Exercice8 :1- Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E): $2\cos x-2\sin x-1-\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $\pi+2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos x.\cos y$

Si on pose : $x-y=p$ et $x+y=q$ alors on peut

déduire : $x=\frac{p+q}{2}$ et $y=\frac{p-q}{2}$

On peut conclure que :

$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$\cos(x-y)-\cos(x+y)=-2\sin x.\sin y$

Si on pose : $x-y=p$ et $x+y=q$ alors on peut

déduire : $x=\frac{p+q}{2}$ et $y=\frac{p-q}{2}$

$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété 7: Pour tous réels p , q, on a :

$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application : *Transformer en produits les expressions suivantes :*

1) $A(x)=\sin 2x+\sin 4x$

2) $B(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

Solution :1)

$A(x)=\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$

2)on a :

$\cos x+\cos 3x=2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)=2\cos 2x\cos x$

$\cos 2x+\cos 4x=2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

Donc : $B(x)=2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)$

Et on a : $\cos 2x+\cos 3x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Donc : $B(x)=4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+ (2) on peut conclure que :

$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos x.\cos y$ d'où :

$\cos x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété : Pour tous réels x, y on a :

$\cos x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

$\sin x.\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$

$\sin x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Application : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

Solution :

1) $\cos 2x\times\sin 4x=\frac{1}{2}\left(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin 6x-\sin(-2x)\right)$

$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x$

2) $\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos(x+3x)-\cos(x-3x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(2x)\right)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\left(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Exercice10 : calculer

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Solution :

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice11 : Montrer que

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3) en déduire que: $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Solution :

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$

3) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$=-\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice12 : Montrer que $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Solution : on a :

$\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

et $\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

donc : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\dfrac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$

car : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Exercice 13: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Solution :

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$

Exercice 14: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Solution : 1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$

$=2\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

$\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$??

Methode1:

$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\sin x\cos x\right)$

$=\frac{1}{4}\left(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right)=\cos^3 x$

Methode2: $\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\cos 2x\times\cos x\right)$

$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

$\cos^3 x=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos 3x\right)$

Exercice 15: $P(x)=\sin 2x-\sin x$ et $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

Montrer que : $P(x)=\sin x\left(2\cos x-1\right)$ et $Q(x)=\cos x\left(2\cos x+1\right)$

Solution :

$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x\left(1+2\cos x\right)$

$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x\left(2\cos x-1\right)$

Exercices 16:

1- Linéariser : $2\cos^2 x.\sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\cos x = a$

Propriété :Considérons l'équation (E) $\boldsymbol{\cos x = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $\cos x = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0,\pi[$ qui vérifie $\cos\alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = -B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices17 :1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi,\pi]$

1.2 $\sin x = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\boldsymbol{\sin x = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\sin x = 1$ sont les réels : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $\sin x = -1$ sont les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\sin\alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$ sont les solutions des équations : $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ Ou $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices18 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi,\pi]$

1.3 $\tan x = a$

Propriété : Pour tout réel a, il existe un et un seul réel α dans l'intervalle$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$qui vérifie $\tan\alpha = a$,

et l'équation $\boldsymbol{\tan x = a}$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation : $A(x) = B(x) + k\pi$

Exercices19 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

Exercices20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $\left[0\,;\pi\right]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution : 1) on a $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Ssi $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ssi

$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ ssi

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

ssi $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$: $0\le\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\le\pi$

  et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\le 1$ donc $-\frac{7}{24}\le k\le\frac{29}{36}$ Donc

$-0,29\le k\le 1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

  $0\le\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{13}{12}+2k\le 1$ Donc $-\frac{13}{24}\le k\le -\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54\le k\le 0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie ssi

$2x-\frac{\pi}{5}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ssi $2x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

ssi $2x\neq\frac{7\pi}{10}+k\pi$ ssi $x\neq\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi

$2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$ Donc

$-1,45\le k\le 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

2) L'équation : (E): $a\cos x+b\sin x+c=0$

Si $abc=0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $a\cos x+b\sin x$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

donc :Il existe un réel φ tel que :

$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Par suite :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x\right)$$

et d'après la formule d'addition

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right)$$

2.2 L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$acosx + bsinx + c = 0 \Leftrightarrow acosx + bsinx = -c$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right) = -c$

où $cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow cos(x-\varphi) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété : Soient a et b deux réels tels que : $(a, b) \neq (0,0)$ on a pour tout réel x :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right)$ où le réel φ est déterminer par : $cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

L'équation $acosx + bsinx + c = 0$ se ramène à :

$cos(x-\varphi) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple1 : $\cos x - \sin x \quad a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

Exemple2 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x + \sin x$

$b=1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Donc : $S = \left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercices21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

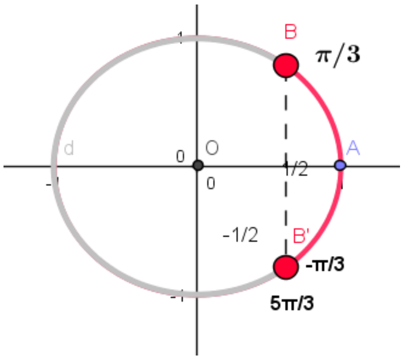
1) Rappelles

1.1) Inéquations avec cos

Exemple : Considérons l'inéquation cosx $\geq \dfrac{1}{2}$

Tout d'abord il faut résoudre l'équation cosx $= \dfrac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont : $M(\frac{\pi}{3})$ et $M'(-\frac{\pi}{3})$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation cosx $\geq \dfrac{1}{2}$ sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $M'IM$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

les solutions dans $[0,2\pi]$ sont :

$S_{[0,2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

Exercices22 : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation :

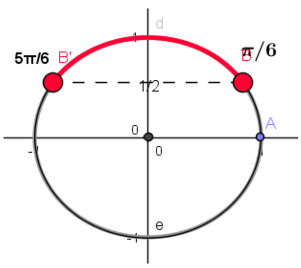
$2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

Exemple : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$

$\sin x \geq \dfrac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin\dfrac{\pi}{6}$

donc $S = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$



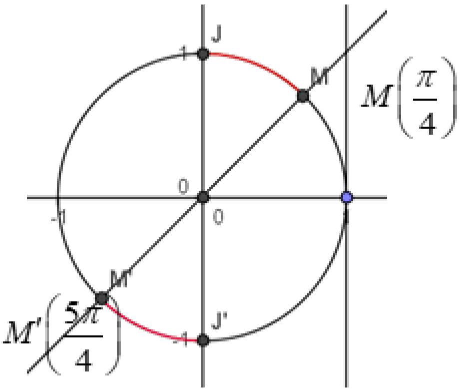
1.3) Inéquation avec tan

Exemple1 : Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$ Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $\tan x-1\geq 0$ Donc

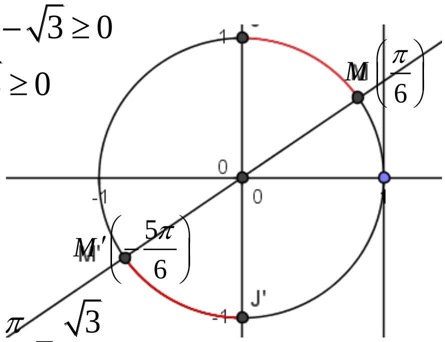
$$S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$$



Exemple2 : Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

On a $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

ssi $\tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ Donc

$$S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercices23 : 1)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

2)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$b=-1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$:

$-\pi\leq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq-\frac{1}{2}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{3}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{2}$

- Encadrement de $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\pi\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc $-1\leq\frac{1}{6}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{7}{6}\leq 2k\leq\frac{5}{6}$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $k=0$ on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}$

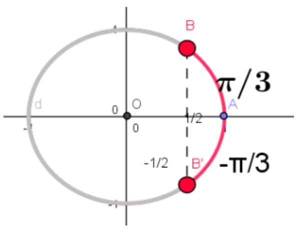
Donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right\}$

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$?

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq 1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$$

On pose : $X=x+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos X\geq\frac{1}{2}$



$$\cos X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq X\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$$

$S_{[-\pi,\pi]} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$

Exercices24 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$

2)Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$

solution: 1) a)on pose $t = \sin x$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi $2t^2 - 9t - 5 \le 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : Δ = (-9) ^{2} – 4 x 2 x (-5) = 121

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

ssi $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le -\frac{1}{6} + 2k \le 2$ Donc $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$ Donc

$0,08 \le k \le 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ Donc $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$ Donc

$-0,5 \le k \le 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le \sin x \le 1 < 5$

Donc $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$ ssi $\sin x + \frac{1}{2} \ge 0$

ssi $\sin x \ge -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x \ge \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq x vérifie $\sin x \ge -\frac{1}{2}$

donc $S = \left[0;\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

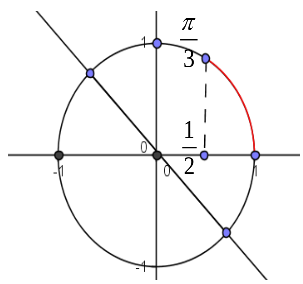
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$ est définie

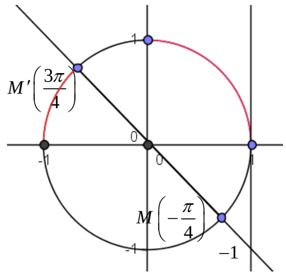
dans $[0;\pi]$ ssi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc $D = [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \ge 0$ ssi $\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $\cos x \ge \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \ge 0$ ssi $\tan x \ge -1$ ssi $\tan x \ge \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$





x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x - 1$		+	0	−		−		−	
$\tan x + 1$		+		+	‖	−	0	+	
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$		+		−	‖	+	0	−	

donc $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice26 :

Résoudre dans $\left[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}\right]$ l'équation $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice27 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I = [-\pi;\pi]$ l'équations: $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Solution : 1)

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x\cos 2x - \sin 2x\sin x$$

$$= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^2 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

2) $A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x$$

3)a) $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Car : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

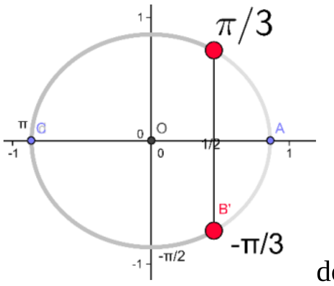
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} \succ 0$

Donc : $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$



donc $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice28 : on pose :

$$A = \sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} \times \sin\frac{3\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) monter que : $\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

1): $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$$\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) déduction : $A=\frac{3}{16}$?

$$A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}$$ Donc : $A=\frac{3}{16}$

Exercice 29: soit : $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta=5$

1) monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta=3$

2) déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=5-5\cos\theta$

$$\Leftrightarrow 3\sin\theta=5(1-\cos\theta)\Leftrightarrow 3\sin\theta=5\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=10\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}\ \text{ car }\ \sin\frac{\theta}{2}\neq 0$$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}-\frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}}=\frac{102}{34}=3$$

2)on a le systeme: $\begin{cases}3\sin\theta+5\cos\theta=5\\5\sin\theta-3\cos\theta=3\end{cases}$ on le résolvant on trouve: $\cos\theta=\frac{8}{17}$ et $\sin\theta=\frac{15}{10}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien