PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

I) RAPPELLE

1) Définition du produit scalaire.

1.1 Mesure algébrique :

Définition :

Soit $(D)_{(O,I)}$ une droite graduée ; M et N deux points sur la droite (D) d'abscisses respectifs x_M et x_N le réel $x_N - x_M$ s'appelle la mesure algébrique entre les points M et N et se note : $\overline{MN}$

Propriétés :

Sur une droite graduée on a: • $\overline{NM} = -\overline{MN}$ • $\overline{MM} = 0$ • $\overline{MN} + \overline{NM'} = \overline{MM'}$ (Relation de Shales) • $\lvert\overline{MN}\rvert = MN$

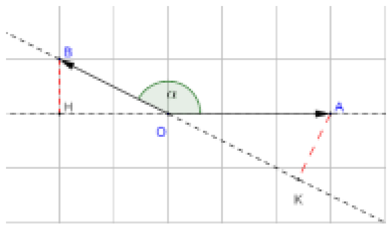
1.2 Définition du produit scalaire dans $\mathcal{V}_2$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

- On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et soit α la mesure en radian de l'angle $[\widehat{AOB}]$; on a deux cas de figure qui se représentent : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$;

Soient H la projection orthogonale de B sur (OA) et K la projection orthogonale de A sur (OB) on a :

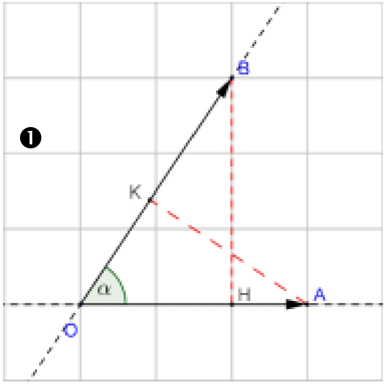
$\mathbf{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}}$	$\mathbf{\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi}$
	
On a $\overline{OH}$ et $\overline{OA}$ ont même signe donc $\overline{OA} \times \overline{OH} \geq 0$ D'où : $\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH$ D'autre part : $cos\alpha = \frac{OH}{OB}$ on conclut que $OH = OB\cos\alpha$ Et par suite : $\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH = OA \times OB \times \cos\alpha$ De même : $\overline{OK}$ et $\overline{OB}$ ont même signe donc $\overline{OB} \times \overline{OK} \geq 0$ D'où : $\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK$ D'autre part : $cos\alpha = \frac{OK}{OA}$ on conclut que $OK = OA\cos\alpha$ Et par suite : $\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK = OA \times OB \times \cos\alpha$ Finalement : $\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha \geq 0}$	On a $\overline{OH}$ et $\overline{OA}$ ont des **signes opposés** donc $\overline{OA} \times \overline{OH} \leq 0$ D'où : $\overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH$ D'autre part : $\cos(\pi - \alpha) = \frac{OH}{OB}$ on conclut que $OH = OB\cos(\pi - \alpha)$ Et par suite et comme $\cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$ on a : $\overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH = OA \times OB \times \cos\alpha$ De même : $\overline{OK}$ et $\overline{OB}$ ont des **signes opposés** ; donc $\overline{OB} \times \overline{OK} \leq 0$ D'où : $\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK$ D'autre part : $\cos(\pi - \alpha) = \frac{OK}{OA}$ on conclut que : $OK = OA\cos(\pi - \alpha)$ Et par suite : $\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK = OA \times OB \times \cos\alpha$ Finalement : $\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha \leq 0}$

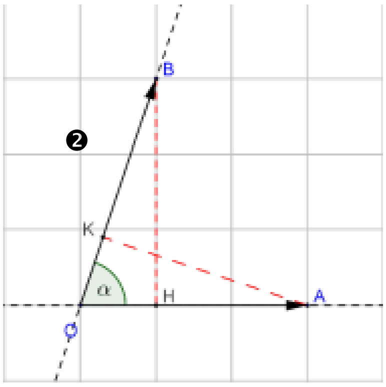
Le réel $\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha}$ **s'appelle le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$**

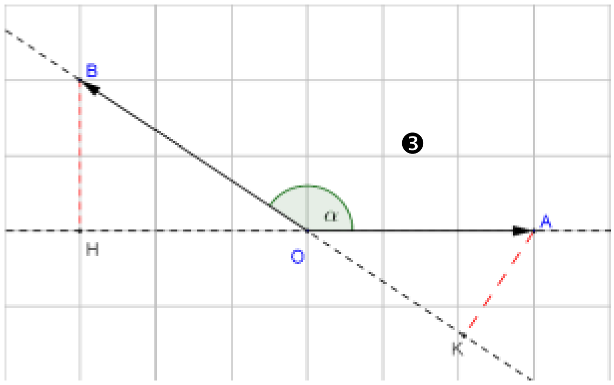
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on pose $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

Exercice 1 :

1- Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ pour chaque figure







2- Calculer $cos\alpha$ dans la figure ❷

3- Calculer OK dans la figure ❸

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle équilatérale tel que : $AB = 6$; calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Cas particuliers :

Soient O, A et B trois ponts du plan et α la mesure de l'angle géométrique $[\widehat{AOB}]$

- Si $\alpha = 0$ on aura : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(0) = OA \times OB$ car $\cos(0) = 1$
- Si $\alpha = \pi$ on aura : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\pi) = -OA \times OB$ car $\cos(\pi) = -1$
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on aura : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1.3 Propriétés du produit scalaire

Propriété :

Le produit scalaire est :

- **Symétrique :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéaire :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k on a :

  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{(v + w)} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\overrightarrow{(u + v)} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$
- **Le carrée scalaire est positif :** Pour tout vecteurs $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $(\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0})$

1.4 Norme d'un vecteur

D'parés la propriété précédente on a : Pour tout vecteurs $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2$ et s'appelle le carré scalaire

Définition :

Le réel positif $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ s'appelle la norme du vecteur $\vec{u}$ on la note : $||\vec{u}||$

1.5 Une autre définition du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ on a $OA = ||\vec{u}||$ et $OB = ||\vec{v}||$

et on sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\alpha)$

$$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha)$$

Définition :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$; on a $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on pose $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

1.6 Identités remarquables

Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

1.7 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$

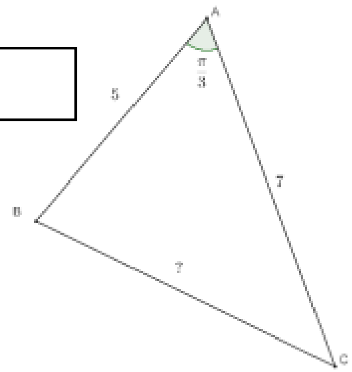
Remarques.

- Le vecteur nul est orthogonal avec tous les vecteurs de $\mathcal{V}_2$.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ on a : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(AB) \perp (CD)$.

1.8 Les applications :

Théorème : d'Al-Kashi (1380-1429)

Dans un triangle ABC on a : $\boldsymbol{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB \times AC\cos(\widehat{BAC})}$

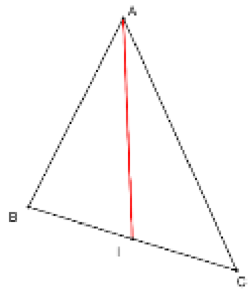


Ce théorème est connu sous le nom d'Al-Khasi ; c'est une généralisation du théorème de Pythagore. Il nous permet de déterminer la longueur du troisième côté si on connait la longueur de deux côté et l'angle qu'ils définissent.

Théorème : de la médiane

Soit ABC un triangle et I milieu de $[BC]$; on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Le théorème de la médiane nous permet de calculer la longueur du médiane dans un triangle si on connait les longueurs des trois côtés.



II) INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Activité 1:

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = (x\,\vec{u} + \vec{v})^2$

1- Développer $f(x)$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$.

3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.

4- En déduire que : $(\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}_2^2)(\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 :

On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Propriété : L'inégalité de Cauchy Schwarz

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété : L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

III) ENSEMBLE DES POINTS.

1) $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point fixe dans le plan $(\mathcal{P})$ et $(\Delta_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = k\}$ où k un nombre réel.

Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$M \in (\Delta_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AH} = k \quad \text{où } H \text{ est la projection orthogonale de } M \text{ sur la droite } (AB)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{AB} \quad \text{qui est constant}$$

Donc (Δ_k) est la droite qui passe par H définie par $\overline{AH} = \frac{k}{AB}$ et qui est perpendiculaire à (AB)

Application : Soit ABC un triangle équilatérale tel que $AB = 2$

Déterminer est construire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = -2$.

2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

Soient A et B deux points distincts et k un réel $(\Gamma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k\}$

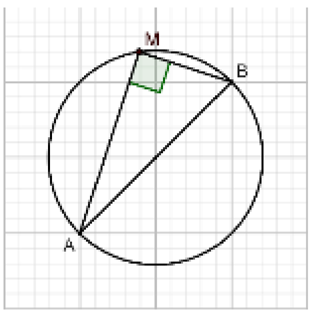
$$M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = k \quad \text{où } I \text{ milieu de } [AB]$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.\underbrace{(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IM}^2 = k \qquad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BI} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors : $(\Gamma_k) = \emptyset$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors : $(\Gamma_k) = \{I\}$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors : (Γ_k) est le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$



Cas particulier : Si $k = 0$ (Γ_0) est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon

$R = \sqrt{\frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}$ donc (Γ_0) est le cercle de diamètre $[AB]$

Propriété :

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

3) $MA^2 + MB^2 = k$

Exercice :

Soient A et B deux points distincts et k un réel positif $(\Sigma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 = k\}$

1- Montrer que $M \in (\Sigma_k) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$ où I est le milieu de $[AB]$

2- Discuter suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (Σ_k).

Application :

Soit ABC un triangle rectangle en A et $(\mathcal{C}) = \{M \in (\mathcal{P}) / MB^2 + MC^2 = BC^2\}$.

1- Vérifier que $A \in (\mathcal{C})$

2- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$.

4) $MA^2 - MB^2 = k$

Exercice :

Soient A et B deux points distincts et k un réel $(\Delta_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 - MB^2 = k\}$

1- Montrer que $M \in (\Delta_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = \frac{k}{2}$ où I est le milieu de $[AB]$

2- Déterminer la nature de l'ensemble (Δ_k).

Application.

Soit $ABCD$ un carrée, déterminer et construire l'ensemble des points M qui vérifient : $MA^2 - MB^2 = BD$

5) $\frac{MA}{MB} = k$

Soient A et B deux point distincts et k un réel strictement positive $(\Gamma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \frac{MA}{MB} = k\}$

- Si $k = 1$ alors : $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow MA = MB$

  (Γ_k) est la médiatrice du segment $[AB]$

- Si $k \neq 1$ Montrer que

  $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ où $I = bar\{(A,1),(B,k)\}$ et $J = bar\{(A,1),(B,-k)\}$

  Déterminer l'ensemble (Γ_k).

Application.

Soit $ABCD$ un carrée, déterminer et construire l'ensemble des points M qui vérifient : $\frac{MA}{MB} = 2$

6) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ $\qquad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Exercice

Soient ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = 1$ et D le point symétrique de A par rapport à B

Soit $(\mathcal{C}) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 15\}$

1- Montrer que $D \in (\mathcal{C})$

2- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$

7) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Exercice

Soient ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = 1$ et I le milieu de $[BC]$

Soit $(\Delta) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0\}$

1- Montrer que $I \in (\Delta)$

2- Déterminer et construire l'ensemble (Δ)