

# **PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$**

## **Etude analytique**

### I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

#### Définitions :

Soit  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $\mathcal{V}_2$ .

- La base  $\beta$  est dite **orthogonale** si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- La base  $\beta$  est dite **normée** si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

Soit  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan ( $\mathcal{P}$ )

- On dit que le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé si la base  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$  associée à  $\mathcal{R}$  est orthonormée.

### II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormée de  $\mathcal{V}_2$ . et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{V}_2$  ; on a :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$= xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j}^2 \quad \text{d'après la bilinéarité du produit scalaire.}$$

$$= xx' + yy' \quad \beta(\vec{i}, \vec{j}) \text{ est une base orthonormée}$$

#### Propriété :

L'espace  $\mathcal{V}_2$  est rapporté à une base orthonormée  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{V}_2$  on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  alors  $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

#### Exercice :

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Considérons la droite ( $D$ ):  $2x - y + 1 = 0$  et  $N$  un point sur la droite ( $D$ ) d'abscisse  $\alpha$ .

- 1- Déterminer les coordonnées de  $N$ .
- 2- Déterminer la distance  $ON$ .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $ON$  est minimale.

### III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

#### 1) L'expression de cos :

L'espace  $\mathcal{V}_2$  est rapporté à une base orthonormée  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{V}_2$  on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\text{Par suite : } \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

## 2) L'expression de sin :

### 2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace  $\mathcal{V}_2$  est rapporté à une base orthonormée  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle **polaire**  $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$

Puisque  $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors :  $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$  et puisque  $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  alors

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = y$$

$$\text{d'autre part : } \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y$$

$$= \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

$$\text{On peut conclure que : } \begin{cases} x = \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ y = \vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Et par suite : } \vec{u} &= x \vec{i} + y \vec{j} = \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{j} \\ &= \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \end{aligned}$$

Cette écriture s'appelle l'écriture **trigonométrique** du vecteur  $\vec{u}$ .

### 2.2 L'expression de sin

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle polaire  $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$  et  $\vec{w}$  le vecteur tel que :  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$  et  $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur  $\vec{w}$  on a :

$$\vec{w} = \|\vec{w}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{i} + \|\vec{w}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{j}$$

$$= -\|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{j}. \quad (\text{car : } \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|)$$

$$= -y \vec{i} + x \vec{j}$$

$$\text{Par suite } \vec{w} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

D'où on peut conclure que :  $\vec{v} \cdot \vec{w} = -x'y + xy'$  et on a :  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$

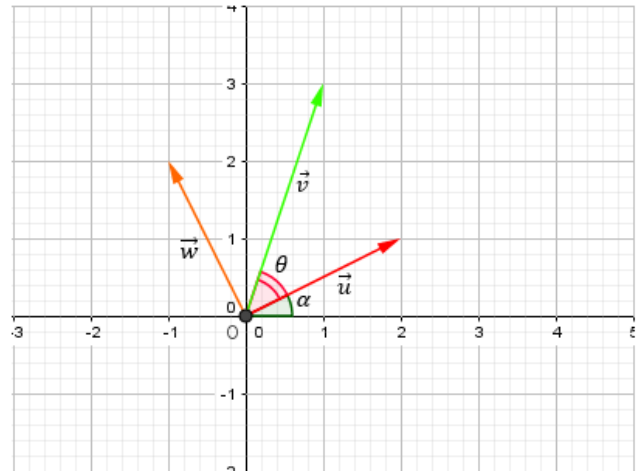
où :  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \theta [2\pi]$

Ce qui nous permet de confirmer que :  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = -x'y + xy'$  et donc :  $\sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

### Théorème :

L'espace  $\mathcal{V}_2$  est rapporté à une base orthonormée  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$  ; Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$



**Application :** Déterminer la mesure principale de l'angle définie par :  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

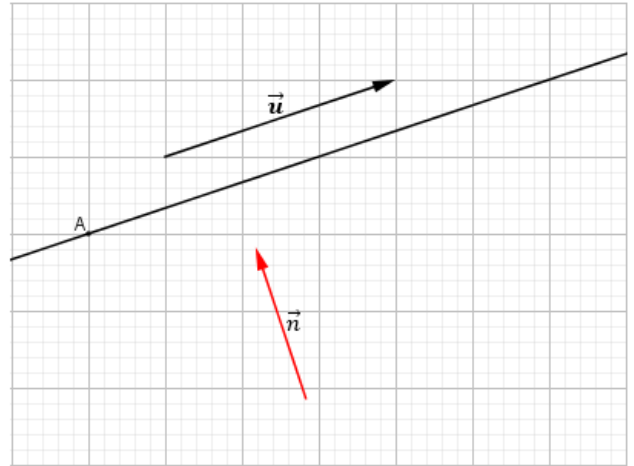
### 1) Vecteur normal sur une droite.

**Définition :**

Soit  $D_{(A, \vec{u})}$  la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  ; tout vecteur  $\vec{n}$  **non nul et orthogonal** à  $\vec{u}$  s'appelle un vecteur **normal sur la droite (D)**.

**Remarque :**

- Si  $\vec{n}$  est normal sur une droite (D) ; Tout vecteur non nul colinéaire avec  $\vec{n}$  est aussi normal sur la droite (D).
- Si (D):  $ax + by + c = 0$  est une droite dans le plan alors  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite (D), le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est non nul et orthogonal à  $\vec{u}$  donc normal sur la droite (D).



### 2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient  $A(x_A, y_A)$  un point donné, et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet  $\vec{v}$  comme vecteur normal.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0 \end{aligned}$$

**Propriété :**

Soient  $A(x_A, y_A)$  un point donné, et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet  $\vec{v}$  comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme : (D):  $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

**Exercice :**

Considérons le triangle ABC où  $A(2,1)$ ,  $B(5,0)$  et  $C(7,6)$

- 1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.  
b) En déduire les coordonnées du point  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.
- 3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.
- 4) Vérifier que les points  $\Omega$ , G et H sont alignés

### 3) Distance d'un point par rapport à une droite.

**Définition :**

Soient (D) une droite et  $M_0$  un point dans le plan. La distance du point  $M_0$  à la droite (D) est la distance  $M_0H$  où H est la projection orthogonal de  $M_0$  sur (D).

On la note :  $d(M_0, (D))$

### Remarque

La distance d'un point  $M_0$  à une droite  $(D)$  est la plus petite distance de  $M_0$  à un point  $M$  de  $(D)$

$$d(M_0, (D)) = \min_{M \in (D)} M_0M$$

### Preuve :

Soit la droite  $(D): ax + by + c = 0$  et  $M_0(x_0, y_0)$  ;

Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M_0$  sur  $(D)$ ,  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est normal sur  $(D)$ . On a pour tout point  $A(x_A, y_A)$  de la droite  $(D)$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} &= (\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n} \\ &= \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} \\ &= \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

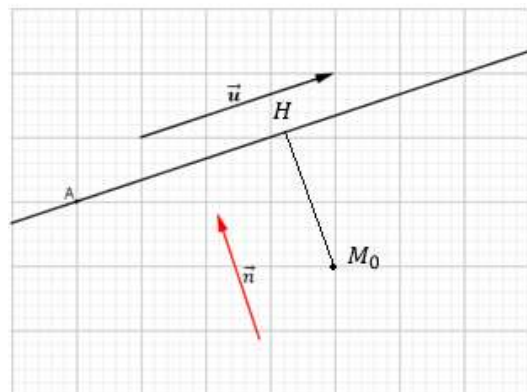
On conclue que  $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$  par suite

$$M_0H \times \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$$

$$\text{Et finalement : } M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

En passant à l'expression analytique :

$$\begin{aligned} \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M_0A} \begin{pmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \end{pmatrix} \text{ par suite :} & \quad M_0H = \frac{|a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0)|}{\|\vec{n}\|} \\ & = \frac{|ax_A + by_A - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A = -c \\ & = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ & = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



### Théorème :

Soient  $(D): ax + by + c = 0$  une droite et  $M_0(x_0, y_0)$  un point dans le plan. La distance du point  $M_0$  à la droite  $(D)$  est :  $d(M_0, (D)) = M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

### Exercice :

Considérons la parabole d'équation :  $(P): y = x^2$  et la droite  $(D): y = x - 1$

- 1- Tracer la droite  $(D)$  et la parabole  $(P)$ .
- 2- Soit  $N_\alpha$  un point d'abscisse  $\alpha$  et varie sur la parabole  $(P)$ 
  - a) Déterminer en fonction de  $\alpha$  la distance  $d(N_\alpha, (D))$ .
  - b) Pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $d(N_\alpha, (D))$  est minimale.

## V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

### **Rappelle :**

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .
- l'égalité est vérifiée si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .
- l'égalité est vérifié si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

### **Propriétés :**

L'espace vectoriel  $\mathcal{V}_2$  est muni d'une base  $\beta(\vec{i}, \vec{j})$  orthonormée.

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  on a :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

- L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$