

# PRODUIT SCALAIRE DANS $V_2$

## Etude analytique (1)

### I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

**Définitions** : Soit  $B(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $V_2$ .

- 1) La base  $B$  est dite **orthogonale** si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- 2) La base  $B$  est dite **normée** si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- 3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.
- 4) Soit  $O$  un point du plan

Soit  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan ( $\mathcal{P}$ )

On dit que le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé si la base  $B(\vec{i}; \vec{j})$  associé à  $\mathcal{R}$  est orthonormée.

On pose :  $\vec{i} = \vec{OI}$  et  $\vec{j} = \vec{OJ}$

### II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit  $B(\vec{i}; \vec{j})$  une base orthonormée de  $V_2$ .

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$  car  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  puisque :  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 1$

On a donc la propriété suivante :

**Propriété** : L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :

- 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- 2)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 3)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  alors

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Exercice** : dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(1; -3)$  et  $B(3; 7)$  et  $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

**Solution** : 1)

*Methode1* :  $\vec{BC}(-6; -6)$  et  $\vec{AC}(-4; 4)$  et  $\vec{AB}(2; 10)$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Puisque :  $AC^2 + BC^2 = 32 + 72 = 104$  et  $AB^2 = 104$

Donc :  $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

*Methode2* :  $\vec{BC}(-6; -6)$  et  $\vec{AC}(-4; 4)$

Donc :  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 24 - 24 + 0$  Donc :  $\vec{AC} \perp \vec{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$$

**Exercice** :

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Considérons la droite ( $D$ ):  $2x - y + 1 = 0$  et  $N$  un point sur la droite ( $D$ ) d'abscisse  $\alpha$ .

- 1- Déterminer les coordonnées de  $N$ .
- 2- Déterminer la distance  $ON$ .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $ON$  est minimale.



### III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

#### 1) L'expression de cos :

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) = xx' + yy'$

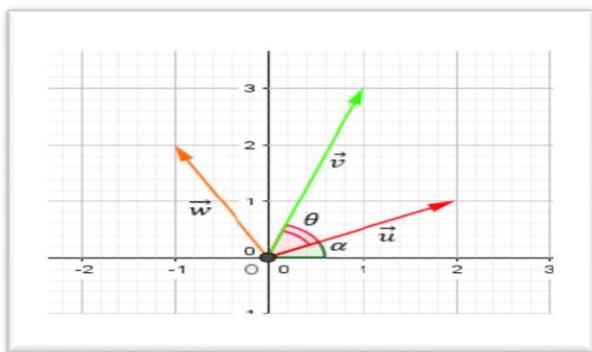
$$\text{Par suite : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

#### 2) L'expression de sin :

##### 2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée

$$B(\vec{i}; \vec{j})$$



$\vec{u}(x; y)$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle polaire  $(\vec{i}; \vec{u})$

Puisque  $\vec{i}(1; 0)$  alors :  $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$  et puisque  $\vec{j}(0; 1)$

alors

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = y \text{ D'autre part: } \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{i}\| \cos(\vec{u}; \vec{i}) = \|\vec{u}\| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{j}\| \cos(\vec{u}; \vec{j}) = \|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

$$\text{On peut conclure que : } \begin{cases} x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ y = \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{cases}$$

Et par suite:  $\vec{u} = \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{j} = \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur  $\vec{u}$ .

##### 2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x; y)$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle polaire  $(\vec{i}; \vec{u})$

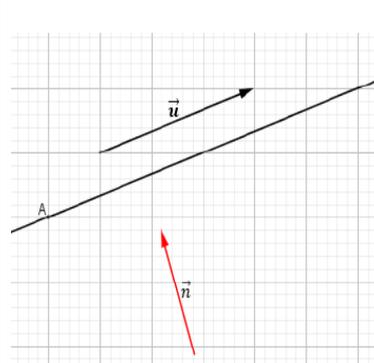
et  $\vec{w}$  le vecteur tel que :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$  et  $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur  $\vec{w}$

$$\text{on a : } \vec{w} = \|\vec{w}\| \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \|\vec{w}\| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$$

$$\vec{w} = -\|\vec{w}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{w}\| \cos \alpha \vec{j} = -\|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{j}$$

$$(\text{car : } \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|) \quad \vec{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$



Par suite  $\vec{w}(-y; x)$

D'où on peut conclure que :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -x'y + xy'$$

et on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta$$

où :  $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \theta [2\pi]$  Ce qui nous permet de confirmer

$$\text{que : } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = -x'y + xy'$$

$$\text{et donc : } \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**Théorème :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**Exercice:** dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les points

$A(5; 0)$  et  $B(2; 1)$  et  $C(6; 3)$

1) Calculer  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  et  $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

$$\text{Solution : } 1) \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et}$$



$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

et on a :  $\overrightarrow{AB}(-3;1)$  et  $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{10}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{0}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = 0$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-10}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -1$$

2) on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  et  $AB = AC$  donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-\pi}{2} [2\pi] \text{ car : } \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ et}$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -1$$

$$\text{Donc : } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

#### IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

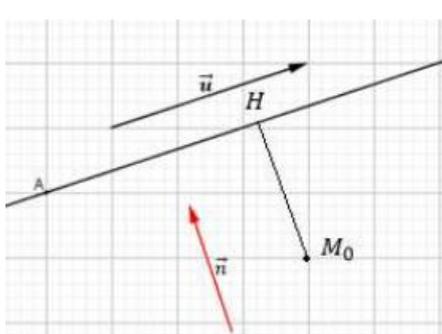
##### 1) Vecteur normal sur une droite.

**Définition :** Soit  $D(A; \vec{u})$  la droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  ; tout vecteur  $\vec{n}$  non nul et orthogonal à  $\vec{u}$  s'appelle un vecteur normal sur la droite (D).

##### Remarque :

**Si**  $\vec{n}$  est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec  $\vec{n}$  est aussi Normal sur la droite (D).

**Si** (D):  $ax + by + c = 0$  est une droite dans le



plan alors  $\vec{u}(-b; a)$  est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur  $\vec{n}(a; b)$  est non nul et orthogonal à  $\vec{u}$

donc normal sur la droite (D).

##### 2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient  $A(x_A; y_A)$  un point donné, et  $\vec{v}(a; b)$  un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet  $\vec{v}$  comme vecteur normal.

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

**Propriété :** Soient  $A(x_A; y_A)$  un point donné, et

$\vec{n}(a; b)$  un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet  $\vec{n}$  comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

$$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

**Exercice :** déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par  $A(0;1)$  et qui admet  $\vec{n}(2;1)$  comme vecteur normal

**Solution :** on a (D) qui passe  $A(0;1)$  et  $\vec{n}(2;1)$  un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est :  $2(x - 0) + 1(y - 1) = 0$

$$\text{donc : } (D) : 2x + y - 1 = 0$$

**Exercice :** donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) (D):  $x - 2y + 5 = 0$

$$2) (D) : 2y - 3 = 0 \quad 3) (D) : x - 1 = 0$$

**Solution :** un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne :  $ax + by + c = 0$

Est  $\vec{n}(a; b)$

$$1) (D) : x - 2y + 5 = 0 : \vec{n}(1; -2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 0x + 2y - 3 = 0 : \vec{n}(0; 2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 1x + 0y - 1 = 0 : \vec{n}(1; 0) \text{ un vecteur normal}$$

**Exercice :** dans Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(-3;0)$  et  $B(3;0)$  et  $C(1;5)$

1) déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2) déterminer une équation cartésienne de la droite ( $\Delta$ ) parallèle à la droite (AB) passant par C

**Solution :** 1) soit M un point du plan (P)

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) - (y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - y - 1 = 0$$

Donc :  $(D) : 6x - y - 1 = 0$

1) soit  $M(x; y)$  un point du plan  $(\mathcal{P})$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$$

Avec  $\vec{n}$  un vecteur normal à la droite  $(AB)$

Le vecteur :  $\overrightarrow{AB}(6, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$  et on a :  $\vec{n}(1, 6)$

$$\text{On a donc : } M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1) + 6(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 6y - 31 = 0 \text{ Donc : } (\Delta) : x + 6y - 31 = 0$$

**Exercice :** dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(1;2)$  et  $B(-2;3)$  et  $C(0;4)$

- 1) déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  médiatrice du segment  $[AB]$
- 2) déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  la hauteur du triangle  $ABC$  passant par  $A$

**Solution :** 1)  $(D) : ax + by + c = 0$

Avec  $\overrightarrow{AB}(a, b)$  un vecteur normal à  $(D)$

$$\overrightarrow{AB}(-3, 1) \text{ donc : } (D) : -3x + y + c = 0$$

Or  $I \in (D)$   $I$  est le milieu du segment  $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ donc } I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } -3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

Par suite :  $(D) : -3x + y - 4 = 0$

2)  $(\Delta)$  la hauteur du triangle  $ABC$  passant par  $A$

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $A$

Donc  $\overrightarrow{BC}(2, 1)$  un vecteur normal à  $(\Delta)$  donc

$(\Delta) : 2x + y + c = 0$  et on a  $A \in (\Delta)$  donc

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$(\Delta) : 2x + y - 4 = 0$

**Exercice :** Considérons le triangle  $ABC$  où  $A(2,1)$   $B(5,0)$  et  $C(7,6)$

1- a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

b) En déduire les coordonnées du point  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$

2) Déterminer les coordonnées du point  $G$  centre de gravité de  $ABC$ .

3) Déterminer les coordonnées du point  $H$ , orthocentre du triangle  $ABC$ .

4) Vérifier que les points  $\Omega$ ,  $G$  et  $H$  sont alignés

**3) droites perpendiculaires**

**proposition :** Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

on considère les deux droites :  $(D) : ax + by + c = 0$

et  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Avec  $\vec{n}$  le vecteur normal de  $(D)$  et  $\vec{n}'$  le vecteur normal de  $(D')$

$$\text{Exercice : } (D) : 2x + 3y - 1 = 0 \text{ et } (D') : \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$$

Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(D')$

**Solution :**

$\vec{n}(2; 3)$  est un vecteur normal de  $(D)$

$\vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right)$  est un vecteur normal de  $(D')$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{n}'$$

donc  $(D) \perp (D')$

**4) Distance d'un point par rapport à une droite.**

**Définition :** Soient  $(D)$  une droite et  $M_0$  un point dans le plan. La distance du point  $M_0$  à la droite  $(D)$  est la distance  $M_0H$  où  $H$  est la projection orthogonal de  $M_0$  sur  $(D)$ . On la note :  $d(M_0; (D))$

**Remarque :** La distance d'un point  $M_0$  à une droite  $(D)$  est la plus petite distance de  $M_0$  à un point  $M$

$$\text{de } (D) \quad d(M_0; (D)) = \min_{M \in (D)} (M_0M)$$

**Preuve :** Soit la droite  $(D) : ax + by + c = 0$  et

$M_0(x_0; y_0)$ ; Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M_0$  sur  $(D)$ ,  $\vec{n}(a; b)$  est normal sur  $(D)$ .

On a pour tout point  $A(x_A; y_A)$  de la droite  $(D)$  :

$$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}$$



Donc :  $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}$

On conclue que  $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$  par suite

$$\|\overrightarrow{M_0H}\| \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| \text{ et finalement : } M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

En passant à l'expression analytique :

$$\vec{n}(a;b) \text{ et } \overrightarrow{M_0A}(x_A - x_0; y_A - y_0)$$

$$\text{par suite : } M_0H = \frac{|a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$M_0H = \frac{|ax_A - ax_0 + by_A - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$M_0H = \frac{|ax_A + by_A - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Or } A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax_A + by_A = -c$$

$$\text{D'où } M_0H = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Théorème :** Soient la droite (D):  $ax + by + c = 0$  et

$M_0(x_0; y_0)$  un point dans le plan.

La distance du point  $M_0$  à la droite (D) est :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exercice :** Soient la droite (D) d'équation :

$$(D): 3x + 4y + 5 = 0$$

- 1) Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)
- 2) calculer La distance du point O à la droite (D)
- 3) Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

**Solution :** 1) puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D) et la droite ( $\Delta$ ) qui passe par O et perpendiculaire à (D) on va donc résoudre le

$$\text{système suivant : } \begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases} \text{ On trouve :}$$

$$x = \frac{-3}{5} \text{ et } y = \frac{-4}{5} \text{ donc } H\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$$

**Autre méthode :** Soit  $H(x_H; y_H)$  on a

$$H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$$

$\overrightarrow{OH}$  est normal à la droite (D) donc colinéaire avec

$$\vec{u}(3;4) \text{ Donc : } \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$$

Pour déterminer  $x_H$  et  $y_H$  on va donc résoudre le

$$\text{système suivant : } \begin{cases} (1) x_H = 3k \\ (2) y_H = 4k \\ (3) 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$$k = \frac{-1}{5} \text{ Donc : } \begin{cases} x_H = \frac{-3}{5} \\ y_H = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$2) d(O; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc H est le milieu du segment [OO']

Donc :  $\overrightarrow{O'H} = -\overrightarrow{OH}$  on pose : O'(x; y)

$$\text{Donc : } \begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \text{ Donc : } O'\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$$

**Exercice :** Considérons la parabole d'équation :

$$(P): y = x^2 \text{ et la droite } (D): y = x - 1$$

- 1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).
- 2- Soit  $N\alpha$  un point d'abscisse  $\alpha$  et varie sur la parabole (P)
  - a) Déterminer en fonction de  $\alpha$  la distance  $d(N\alpha, (D))$ .
  - b) Pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $d(N\alpha, (D))$  est minimale.

## V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

**Activité 1:** Considérons deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non

nuls et le trinôme  $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

- 1- Développer  $f(x)$ .
- 2- Déterminer le signe de  $f(x)$ .
- 3- Déterminer le discriminant de  $f(x)$ .
- 4- en déduire que pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**Activité 2 :** On sait que pour trois points donnés dans le plan on a :  $MA + MB \geq AB$  le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

1- Développer  $(\vec{u} + \vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**L'inégalité de Cauchy-Schwarz**

a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**L'inégalité triangulaire.**

a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifiée si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

**Propriétés :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base

orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

2) L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

**Exercice:** dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé et direct  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(1; -1)$  et  $B(4; -1)$  et  $C(-2; 2)$

1) Calculer :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne

de la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Solution :** 1) on a :  $\overrightarrow{AB}(3; 0)$  et  $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2) soit  $\alpha$  une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  on a :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et } \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) \text{ on a : } S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

4) soit  $(\Delta)$  la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire a  $(BC)$  passant par A

Donc  $\overrightarrow{BC}(-6, 3)$  un vecteur normal a  $(\Delta)$  donc

$(\Delta) / -6x + 3y + c = 0$  et on a  $A(1; -1) \in (\Delta)$  donc

$$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$$

$(\Delta) / -6x + 3y + 9 = 0$  donc :  $(\Delta) / 2x - y - 3 = 0$

4) soit  $(D)$  la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point  $M(x, y)$  de la droite  $(D)$

On a :  $d(M; (AB)) = d(M; (AC))$

$$\text{D'où } \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$$

On remarque que  $(D)$  se trouve dans le demi plan tel

$$\text{que : } \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \text{ donc : } \sqrt{2}(y+1) = x+y$$

donc : l'équation cartésienne de  $(D)$  est :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ (D) est un demi droite}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

