

LE CERCLE

Etude analytique

Dans tout ce qui va suivre le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

1) EQUATION D'UN CERCLE

Définition :

Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan (\mathcal{P}) qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}_{(\Omega, r)}$

$$\mathcal{C}_{(\Omega, r)} = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$$

Remarque :

On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C}_{(\Omega, r)} &\Leftrightarrow \Omega M = r \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}_{(\Omega, r)}$ à une équation cartésienne de la forme :

$$\mathcal{C}_{(\Omega, r)}: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

2) Equation réduite d'un cercle

On a :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C}_{(\Omega, r)} &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{où : } \alpha = -2a ; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α, β et γ sont des réels.

Inversement :

Soient α, β et γ trois réels et $(\Gamma) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ déterminons en fonction des réels α, β et γ la nature de l'ensemble (Γ) .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \end{aligned}$$

- Si $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} < 0$ alors $(\Gamma) = \emptyset$
- Si $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} = 0$ alors $(\Gamma) = \left\{ \Omega \left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2} \right) \right\}$
- Si $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} > 0$ alors $(\Gamma) = \mathcal{C}_{(\Omega, \sqrt{\rho})}$ où $\Omega \left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2} \right)$ et $\rho = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4}$

Exercice 1 :

Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma_1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma_2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

Exercice 2 :

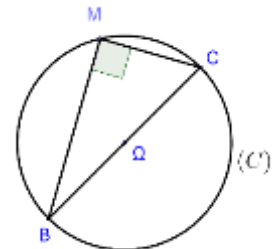
Soit l'ensemble : $(\Gamma_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$ où m est un réel.

- 1- Montrer que pour tout m dans \mathbb{R} , l'ensemble (Γ_m) est un cercle et déterminer ses éléments.
- 2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (Γ_m) .
- 3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit \mathbb{R}
- 4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1, 2)$ appartient-il à (Γ_m) .
b) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (\Gamma_m)$
- 5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (Γ_m) .

3) Cercle définie par son diamètre.**Propriété : (Rappelle)**

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

**Propriété :**

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

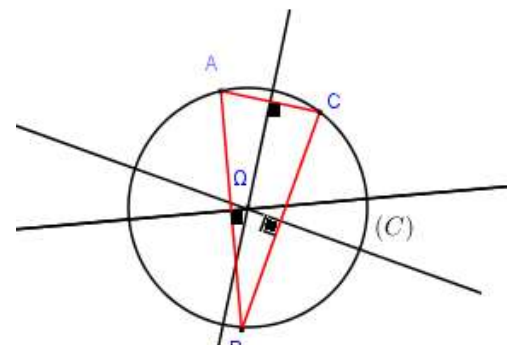
4) Cercle circonscrit à un triangle.

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le centre du cercle qui circonscrit le triangle ABC

Exercice :

Soient les points $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ et $C(5, -2)$

- 1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
- 2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC .



II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition :

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan.

- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.
- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple :

Nous allons résoudre graphiquement le système : $(\Sigma): \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$

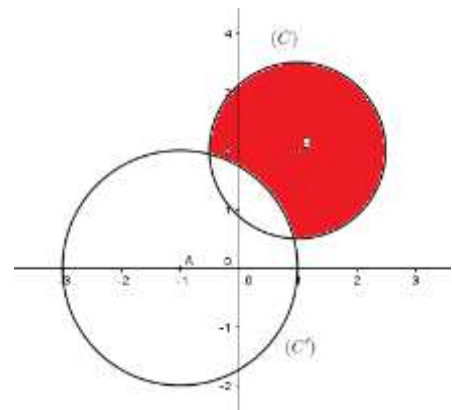
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$ est l'équation du cercle (\mathcal{C})

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ est l'équation du cercle (\mathcal{C}')

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r' = 2$.

L'ensemble des points M qui vérifient est l'extérieur de (\mathcal{C}') intersection l'intérieur de (\mathcal{C})



Exercices :

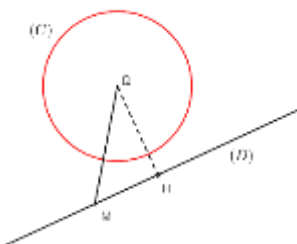
Résoudre graphiquement $(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ de (D) , il suffit de déterminer la distance de Ω à (D) . soit H la projection orthogonal de Ω sur (D)

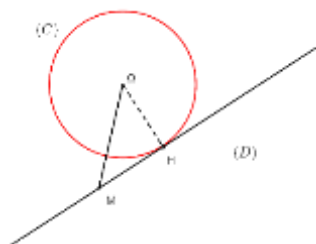
$$d(\Omega, (D)) = \Omega H > r$$



Soit M un point de la droite (D) on a :
 $\Omega M \geq \Omega H > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à l'extérieur du cercle (\mathcal{C})

$$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$$

$$d(\Omega, (D)) = \Omega H = r$$



Puisque $\Omega H = r$ alors H est un point commun entre (D) et (\mathcal{C}) .

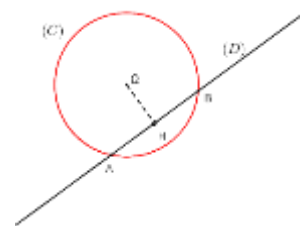
Soit M un point de la droite (D) différent de H on a :

$$\Omega M > \Omega H = r$$

donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à l'extérieur du cercle (\mathcal{C}) .

$$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$$

$$d(\Omega, (D)) = \Omega H < r$$



Dans ce cas le cercle (\mathcal{C}) et la droite (D) se coupent en deux points A et B et H est le milieu du segment $[AB]$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition :

Une droite (D) est dite tangente à un cercle (\mathcal{C}) s'ils se coupent en un seul point.

Propriété :

Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ si et seulement si $d(\Omega, (D)) = r$

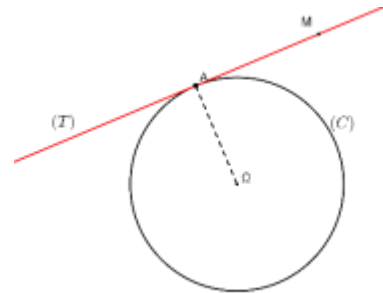
2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan où $\Omega(a, b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A

$$M(x, y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$



Propriété :

Soient $\Omega(a, b)$ un point et $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A à pour équation : $(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$

Application :

Soit (\mathcal{C}) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

- 1- Vérifier que le point $A(3, -1)$ appartient au cercle (\mathcal{C}) .
- 2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle (\mathcal{C}) en A .

2.3 Tangente à un cercle (\mathcal{C}) passant par un point à l'extérieure de (\mathcal{C})

Exercice :

Soient le cercle (\mathcal{C}) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

- 1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de (\mathcal{C})
- 2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.
 - b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (\mathcal{C}) .
- 3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta) y = mx + p$
 - a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.
 - b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (\mathcal{C}) .
- 4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (C) .

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) .

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à (C) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

Considérons (C) le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R .

On a : $\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ et $M(X, Y)_{\mathcal{R}'}$, où : $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}'(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par :

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} X = R \cdot \cos\alpha \\ Y = R \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{et par suite : } \begin{cases} x = a + R \cdot \cos\alpha \\ y = b + R \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

Réciproquement l'ensemble $(\Gamma) = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}) / \begin{cases} x = a + R \cdot \cos\alpha \\ y = b + R \cdot \sin\alpha \end{cases} \right\}$ où a et b sont des réels et R un réel positif

est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R .

