Suites numériques

0.1. Généralités

DÉFINITION 0.1.1.
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.
Une suite numérique est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1) L'image de n par une suite u se note u_n.

(2) n est appelé le rang ou l'indice du terme u_n.

(3) Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

REMARQUE 0.1.2. Ne pas mélanger u_{n+1}et $u_n + 1$.

EXEMPLE 0.1.3.

(1) u une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, donc $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$ ...

(2) u une suite définie sur $I = \{2, 3, 4, \ldots\}$ par $u_n = \sqrt{n-2}$, donc $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $u_4 = \sqrt{3}$ ...

0.1.1. Suite définie explicitement.

Toute fonction définie sur $[a; +\infty[$ (où $a \geq 0$) permet de définir une suite numérique.

EXEMPLE 0.1.4.

(1) **Sc. E :** Calculer les quatre premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n - 1$.

(2) **Sc. M :** Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est le nombre de diviseurs de n.

0.1.2. Suite définie par récurrence.

Une suite peut aussi être définie par son premier terme et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent.

EXEMPLE 0.1.5.

(1) Calculer les deux premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(2) Calculer le troisième terme de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \,\text{et}\, v_1 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - v_{n-1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Application (M) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 2^n + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0.2. Suite majorée-minorée-bornée

DÉFINITION 0.2.1. Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite :

(1) majorée, si il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ $(\forall n \in I)$.

(2) minorée, si il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ $(\forall n \in I)$.

(3) bornée, si elle est majorée et minorée.

Application (M) :

soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

(1) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

(2) Déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Application (E) :

soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2 et u_3

(2) Montrer par récurrence que $u_n > 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Application (E) :

soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2 et u_3

(2) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

0.3. Sens de variation.

DÉFINITION 0.3.1. Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

(1) $(u_n)_{n\in I}$ est croissante (strict. croissante) si $n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$ $(n < m \Rightarrow u_n < u_m)$.

(2) $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante (strict. décroissante) si $n < m \Rightarrow u_n \geq u_m$ $(n < m \Rightarrow u_n > u_m)$.

REMARQUE 0.3.2.

(1) Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

(2) Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

PROPOSITION 0.3.3. *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.*
$(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si pour tout entier $n \in I$, $u_n \leq u_{n+1}$.
$(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si pour tout entier $n \in I$, $u_n \geq u_{n+1}$.

PROPOSITION 0.3.4. *Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$, et $(u_n)_{n\in I}$ la suite définie par $u_n = f(n)$, alors*

(1) si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante ;

(2) si f est décroissante, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante.

Application (M) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Montrer par récurrence que (u_n) est minorée par 2.

(2) Étudier le sens de variation de (u_n).

Application (E) :
soit (v_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Étudier le sens de variation de (v_n).

Application (E) :
soit $(w_n)_{n>1}$ la suite numérique définie par $w_n = \frac{2^n}{n}$

(1) Étudier le sens de variation de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0.4. Suite arithmétique

DÉFINITION 0.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$.
$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que $(\forall n \geq p)$ on a

$$u_{n+1} - u_n = r$$

r est appelée la raison de la suite.

EXEMPLE 0.4.2.

(1) La suite (u_n) définie par $u_n = 3n+5$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$.

Application (E) :
soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $w_n = -\sqrt{3}n + \frac{3}{2}$

(1) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

Application (M) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

PROPOSITION 0.4.3. $p \in \mathbb{N}$.

(1) $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique si et seulement si $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ $(\forall n \geq p)$.

(2) Si $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique de raison r alors $u_n = u_m + (n-m)r$, $(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$.

EXEMPLE 0.4.4. Soit (u_n) une suite arithmétique son premier terme $u_0 = -1$.

(1) Déterminer r la raison de la suite (u_n) sachant que $u_{10} = 59$.

(2) Calculer u_7 et u_2.

PROPOSITION 0.4.5. *Soit$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique de raison r . Pour tout entier naturel $n \geq m$:*

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = (n-m+1) \times \left(\frac{u_m + u_n}{2}\right)$$

Application (M) :
I) Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

(2) Déduire u_n en fonction de n.

(3) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

II) Étudier la monotonie d'une suite arithmétique en fonction de sa raison r.

0.5. Suite géométrique

DÉFINITION 0.5.1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$
$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que $(\forall n \geq p)$ on a

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

q est appelée la raison de la suite $(u_n)_{n\geq p}$.

EXEMPLE 0.5.2.
Soit (u_n) une suite numérique définie par

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$q = \frac{2}{3}$ et $u_0 = -1$.

Application (M) :
Soient (u_n) une suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Montrer que $u_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) On pose $v_n = 2 - \frac{3}{u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.

PROPOSITION 0.5.3. $p \in \mathbb{N}$.

(1) $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique si et seulement si* $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$ $(\forall n \geq p)$.

(2) Si $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique de raison* $q \neq 0$ *alors*

$$u_n = q^{n-m} u_m$$

$(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$.

(3) Si $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *alors*

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

$(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$ *et* $(\forall n \geq m)$.

Application (M) :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

(2) Calculer v_4.

(3) Montrer que $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_n - u_0$.

(4) Déduire le terme général de la suite (u_n).

(5) Calculer $S = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

Application (E) :
Soit (u_n) une suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 3u_{n+1} = u_n + 10 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $v_n = u_n - 5$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

(2) Calculer v_{15}.

(3) Calculer la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

(4) Déduire la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.