Suites: Limites & récurrence - Correction des exercices

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325} = \dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\dfrac{365}{n}\right)} = 2\dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{1+\dfrac{365}{n}}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{365}{n}\right)=1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n} = 2n\dfrac{1+\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-1}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)=-1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)} = \dfrac{4n^2\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)}{n\times 2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)} = 2\dfrac{1+\dfrac{1}{4n^2}}{1+\dfrac{1}{2n}}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$ avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n}+17\right)=+\infty$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{3n\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)} = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}}}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1}$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right)=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}}=1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)=1$.

Ainsi, par produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}} = \dfrac{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{\sqrt{n^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=1$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=1$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

g) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Lorsque $n\to+\infty$, on est face à une forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$".

On peut alors penser (et doit penser!) à utiliser la quantité conjuguée pour changer cette soustraction :

$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, d'où, par addition des limites,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=+\infty$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

h) $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$: on peut commencer par essayer de procèder de la même façon en utilisant la quantit´e conjugu´ee,

$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$, mais on se retrouve encore face à une forme indéterminée "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$".

On doit alors factoriser par le terme prépondérant :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

soit, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$.

On a alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right) = 2$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Rappel : Schéma général d'une démonstration par récurrence :

On cherche à montrer par récurrence, pour tout entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

On montre alors, en utilisant cette hypothèse (dite hypothèse de récurrence), que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 > 0$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $u_n > 0$.
On a alors, $5u_n > 0 \Longrightarrow 5u_n + 4 > 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4 > 0$.
La propriété est donc encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n > 0$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Initialisation : $u_0 = -3$.
Or, pour $n = 0$, $(-4)^{n+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3$, et on a donc pour $u_0 = (-4)^{0+1} + 1$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.
ALors, $u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4\left((-4)^{n+1} + 1\right)$, d'après l'hypothèse de récurrence.
Ainsi, $u_{n+1} = 5 - 4(-4)^{n+1} - 4 = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = 1 + (-4)^{n+1}$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et donc $0 < u_0 < 1$, et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $0 < u_n < 1$.
Alors, d'une part $1 < u_n + 1 < 2$, et d'autre part $2 < u_n + 2 < 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{u_n + 2} < \dfrac{1}{2}$.
En mulipliant ces deux inégalités, on obtient alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} < \dfrac{2}{2}$, et on a donc $0 < u_{n+1} < 1$: la propriété est donc encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = 1 \times 1! = 1$, et $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.
Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1$.
Alors, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \left(\sum_{k=1}^{n} k \times k!\right) + (n+1) \times (n+1)! = \Big((n+1)! - 1\Big) + (n+1) \times (n+1)!$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)! + (n+1) \times (n+1)! - 1 = (n+1)!\Big(1 + (n+1)\Big) - 1 = (n+1)!\Big(n+2\Big) - 1$.
Or, $(n + 1)!(n + 2) = (n + 2)!$, et on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n + 2)! - 1 = \Big((n + 1) + 1\Big)! - 1$, ce qui montre que la prorpiété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer u_2, u_3 et u_4 : $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 4$; $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 8$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 16$.

Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^n$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 = 2^0$. De même $u_1 = 2 = 2^1$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

On a alors, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+2} = 2^n\left(5 \times 2 - 6\right) = 2^n \times 4 = 2^n \times 2^2 = 2^{n+2}$, ce qui montre que la propriété est donc encore vraie au rang $(n + 2)$.

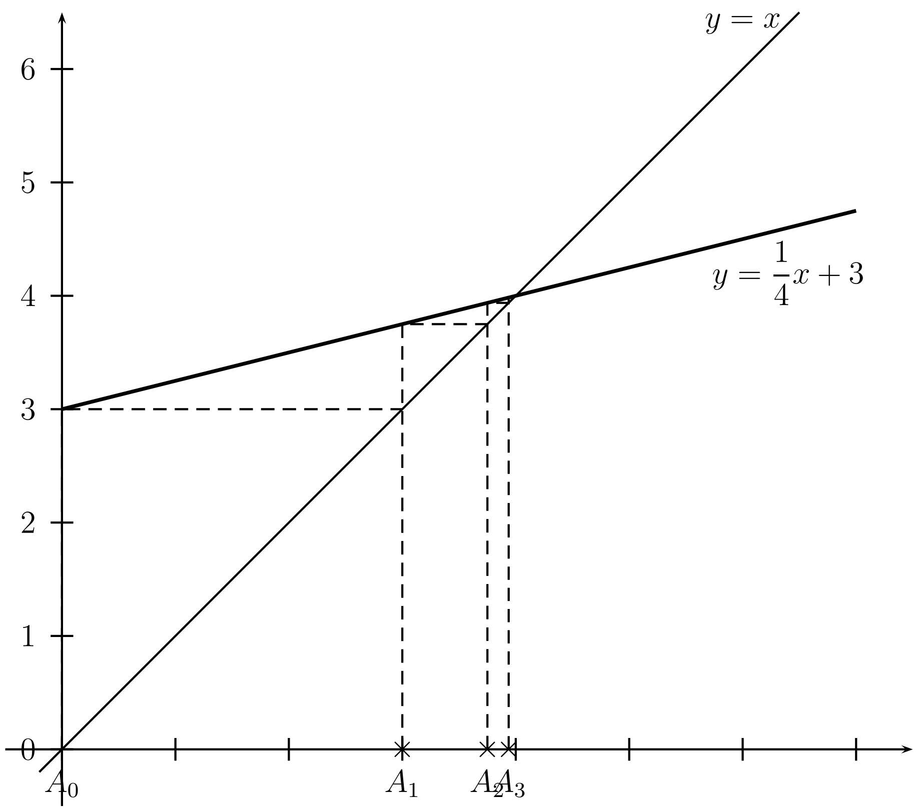
Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n = 2^n$.

Remarque : Dans cette démonstration par récurrence, on a fait une hypothèse de récurrence qui porte sur 2 rangs successifs : n et $(n + 1)$, et qui montre que la propriété se transmet au rang suivant $(n + 2)$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n + 1 = 1$ (d'après l'initialisation), et elle donc vraie au rang $n + 2 = 2$.
Ensuite, comme elle est vraie au rang $n = 1$ et $n + 1 = 2$, elle est donc aussi vraie au rang $n + 2 = 3$.
Puis elle est vraie au rang $n = 2$ et $n + 1 = 3$, donc aussi au rang $n + 2 = 4$.
...

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3.



2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

Initialisation : $u_0 = 1$, et donc $u_0 \leqslant 4$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leqslant 4$.

Alors, $\frac{1}{4}u_n \leqslant \frac{1}{4} \times 4 = 1$, et donc, $\frac{1}{4}u_n + 3 \leqslant 1 + 3 = 4$.
Ainsi, $u_{n+1} \leqslant 4$, et la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient de dmontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

   Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   Initialisation : $u_0 = 1$, et $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{13}{4}$, et donc $u_0 \leqslant u_1$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Alors, $\frac{1}{4}u_n \leqslant \frac{1}{4}u_{n+1}$, d'où, $\frac{1}{4}u_n + 3 \leqslant u_{n+1} + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   Ainsi la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

   Conclusion : On vient de dmontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, et donc que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, elle converge donc vers une limite l.

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Démontrer cette conjecture.

   $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2$; $u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{3} \simeq 1,73$;
   $u_3 = \sqrt{u_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{3} + 1} \simeq 1,65$; $u_4 = \sqrt{u_3 + 1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}} + 1} \simeq 1,61$;
   Comme $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

   Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$.

   Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$ à $n = 3$ d'après les calculs précédents.

   Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n > u_{n+1}$.
   Alors, $u_n + 1 > u_{n+1} + 1$, et donc, $\sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1}$, car la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + 1}$, et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : On vient de montrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.

   Par une récurrence immédiate, comme $u_0 = 1 > 0$, et comme si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > 0$, on sait donc que pour tout entier n, $u_n > 0$.
   De plus, comme $u_0 = 1 < 3$ et que la suite (u_n) est décroissante, on a donc, pour tout entier n, $u_n < u_0 < 3$.

   On a donc bien au final, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.

   La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $l \geqslant 0$.

4. Déterminer l.

La limite l de la suite vérifie nécésairement $l = \sqrt{l+1}$ (point fixe),

soit $l \geqslant 0$ et $l^2 = l + 1 \iff l^2 - l - 1 = 0 \iff \left(l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Comme $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, la limite de la suite (u_n) (car on sait qu'elle en a une) est $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$;
$u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{13}{9}$;
$u_3 = \dfrac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\dfrac{4}{27}$;

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

Initialisation : $u_4 = \dfrac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\dfrac{4}{81} + 1 = \dfrac{77}{81} > 0$, et la propriété est vraie au rang $n = 4$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geqslant 4$ on ait $u_n \geqslant 0$.
Alors, $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0$, et donc, $\dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 0 + n - 2 \geqslant 0 + 4 - 2$, car $n \geqslant 4$.

Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 2 \geqslant 0$, et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On vient donc de démontrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

Pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.
Or, comme $n \geqslant 5$, on a donc $n - 1 \geqslant 4$, et alors, d'après la question précédente, $u_{n-1} \geqslant 0$.
Ainsi, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geqslant 0 + n - 3$.
On a donc, pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$, on en déduit, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.
Ainsi, en multipliant ces inégalités par $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on obtient $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 11 Soit, pour tout entier n, $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $\frac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

On a $(-1)^n = 1$ lorsque n est pair, et $(-1)^n = -1$ lorsque n est impair.

Ainsi, pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, soit aussi $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$, puis, multipliant par $\frac{1}{n+1} > 0$, on obtient $\frac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+1}$.

On a $\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$, et $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$, et donc, par produit et quotient des limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 Soit, pour tout entier n, $u_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$.

Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \frac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier n, $(-1)^n + n \geqslant -1+n$,

et $(-1)^n + 2 \leqslant 1+2 = 3$, d'où $\frac{1}{(-1)^n+2} \geqslant \frac{1}{3}$.

Ainsi, en multipliant ces deux inégalités, on obtient : $u_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2} \geqslant \frac{n-1}{3}$,

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$, on en déduit, d'après le corollaire du théorème des gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$..

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
   Quel semble être la limite de (u_n) ?

$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3} \simeq 1,732\,;$

$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \simeq 1,94\,;$

$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4} \simeq 1,984\,;$

$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{16}+12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{\sqrt{255}}{8} \simeq 1,996$

$u_5 \simeq 1,999$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}\left(u_n^2+12\right) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(u_n^2+4\right) = \frac{1}{4}v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

De plus $v_n = u_n^2 - 4 \iff u_n = \sqrt{v_n+4}$ ou $u_n = -\sqrt{v_n+4}$.

Comme $u_n \geqslant 0$ (car u_n est définie par une racine carrée), on a donc $u_n = \sqrt{v_n+4}$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{0+4} = 2$.

On a ainsi démontré la conjecture sur la limite de (u_n) faite à la question 1.

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \end{cases}$

Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

Une suite stationnaire est une suite constante : pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \cdots = u_1 = u_0$.

Ainsi, la suite est stationnaire si, $u_1 = u_0 \iff \sqrt{3+u_0} = u_0 \iff 3+u_0 = u_0^2$ et $u_0 \geqslant 0$.

On doit donc avoir ainsi $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$ soit, en résolvant l'équation du second degré, $u_0 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ou $u_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Comme $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$, on doit donc nécessairement avoir $u_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$3u_1 = u_0 + 4 = 9 \iff u_1 = 3\,; \quad 3u_2 = u_1 + 4 = 7 \iff u_1 = \frac{7}{3}$.

2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

<u>Initialisation :</u> La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ d'après ce qui précède.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier n on ait $u_n \geqslant 2$.

Alors, $u_n + 4 \geqslant 2 + 4 = 6$, et donc $3u_{n+1} \geqslant 6 \iff u_{n+1} \geqslant \frac{6}{3} = 2$.

Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

<u>Conclusion :</u> On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

   On peut montrer que (u_n) est décroissante par récurrence, en montrant que pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   On peut aussi le montrer directement :

   Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3}$, et donc,

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3}$.

   Or, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$, et ainsi, $-\dfrac{2}{3}u_n \leqslant -\dfrac{4}{3}$, d'où, $u_{n+1}-u_n = -\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{4}{3} \leqslant -\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3} = 0$.

   Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

   D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle converge donc vers une limite $l \geqslant 2$.

   Cette limite l satisfait de plus nécéssairement l'équation $3l = l + 4$ (point fixe), soit $l = 2$.

   Ainsi, la suite (u_n) converge vers $l = 2$.

5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}(u_n - 2) = \dfrac{1}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

   On en déduit que, pout tout entier n, $v_n = v_0 q^n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

6. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Déterminer l'expression de S_n, puis de T_n, en fonction de n.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\
&= 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdot + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 3\left[\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \\
&= 3\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 3\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

   Pour tout entier n, $v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2$, et donc,

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= (v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2) \\ &= (v_0+v_1+\cdots+v_n)+(2+2+\cdots+2) \\ &= S_n + (n+1)\times 2 = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+2(n+1)\end{aligned}$$

7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{9}{2}$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$, et donc, par addition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

Exercice 16 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

   Pour tout entier $n > 0$, $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n$.

   b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

   Pour tout entier $n > 0$, $n+2 \geqslant 2 > 0$, et donc, $n(n+2) > 0$.

   De plus $(n+1)^2 \geqslant 1^2 > 0$, et on a donc $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$.

   De même (en cherchant à utiliser le résultat de la question précédente), $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, soit $-\dfrac{1}{(n+1)^2} < 0$, et donc, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$.

   Au final, on a bien, pour tout entier $n > 0$, $0 < u_n < 1$.

   c. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   Pour tout entier $n > 0$,
   $$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{-(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}\end{aligned}$$

   Or, pour tout entier $n > 0$, $2n+3 > 3 > 0$, et $(n+2)^2(n+1)^2 > 0$,
   d'où, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.

   Remarque : Il y a bien sûr quantité d'autres raisonnements que l'on peut mener pour arriver à cette conclusion :

   - Ecrire $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et étudier le sens de variation de f.

• Procéder par encadrements successifs en partant de $n+1 < n+2$ pour arriver à $u_n > u_{n+1}$

• Conjecturer le sens de variation de (u_n) en calculant les premiers termes, puis démontrer cette conjecture avec un raisonnment par récurrence

• ...

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Initialisation : $x_1 = u_1 = \dfrac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2(1+1)} = \dfrac{3}{4}$
La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
Alors, $x_{n+1} = \underbrace{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n}_{x_n} \times u_{n+1} = x_n \times u_{n+1}$

et donc, avec $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$,

$x_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)} = \dfrac{(n+1)+2}{2\left((n+1)+1\right)^2}$ et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n > 0$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

b. Déterminer la limite de la suite (x_n).

$$x_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, d'où, par produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.