

# Chapitre 5

## Applications du produit scalaire

### I/ Équations de droites

#### a) Définition

##### Définition

Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit normal à une droite  $d$  si la direction de  $\vec{n}$  est orthogonale à celle de  $d$ .

#### b) Propriétés

##### Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/ Une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  a une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .
- 2/ Étant donnés trois réels  $a, b$  et  $c$  où  $a$  et  $b$  ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

##### Démonstration

- 1/ Soit  $d$  une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et soit  $A(x_0; y_0) \in d$ .

Soit  $M(x; y)$ , on a  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$  avec  $c = -ax_0 - by_0$ .

- 2/ Soit  $d$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $ax + by + c = 0$  et soit  $A(x_A, y_A) \in d$ .

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 = ax_A + by_A + c$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$\Leftrightarrow M$  appartient à la droite passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

*Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points  $A(3; -1)$  et  $B(2; 4)$ . Déterminer une équation de la médiatrice  $m$  de  $[AB]$ .*

La médiatrice de  $[AB]$  est la droite perpendiculaire à  $(AB)$  passant par le milieu  $I$  de  $[AB]$ .

On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  donc une équation de  $m$  est de la forme  $-x + 5y + c = 0$ .

De plus,  $I\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \in m$  donc  $-\frac{5}{2} + 5 \times \frac{3}{2} + c = 0$  donc  $c = -5$ .  
Une équation de  $m$  est donc  $-x + 5y - 5 = 0$ .

## II) Norme d'un vecteur.

Le réel  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ , noté  $\vec{u}^2$  est appelé **carré scalaire** de  $\vec{u}$

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} = OA^2$  est un nombre positif.

**Définition 3.2.** La norme d'un vecteur  $\vec{u}$  est le réel positif  $\sqrt{\vec{u}^2}$  notée  $\|\vec{u}\|$

**Propriétés** (De la norme).

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs,  $\alpha$  un réel.

i)  $\|\vec{u}\| = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = 0$ .

ii)  $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$

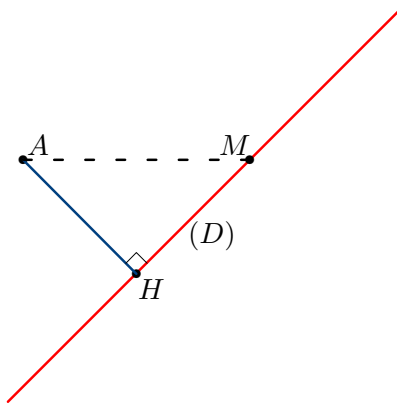
iii)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

## III) Distance d'un point à une droite.

Soit  $(\mathcal{D})$  une droite du plan. Soit  $A$  un point du plan,  $H$  son projeté orthogonal sur  $(\mathcal{D})$ .

Si  $M$  est un point quelconque de  $(\mathcal{D})$ ,  $AM^2 = AH^2 + HM^2$ ; donc  $AM^2 \geq AH^2$   
c'est-à-dire  $AM \geq AH$ .

Ainsi la distance  $AH$  est le minimum des distances de  $A$  aux points de  $(\mathcal{D})$ .



D'où la définition suivante.

**Définition** Soit  $(\mathcal{D})$  une droite du plan. Soit  $A$  un point du plan,  $H$  son projeté orthogonal sur  $(\mathcal{D})$ .

Le nombre réel  $AH$  est appelé la distance du point  $A$  à la droite  $(\mathcal{D})$ ; on le notera  $d(A, (\mathcal{D}))$ .

**Théoreme**. Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ . Soient  $(\mathcal{D})$  une droite d'équation  $ax + by + c = 0$  et  $A$  un point de coordonnées  $(x_A, y_A)$ .

$$\text{Alors } d(A, (\mathcal{D})) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*Démonstration.*

Le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  est normal à  $(\mathcal{D})$

Puisque  $H$  appartient à  $(\mathcal{D})$ , on a :  $ax_H + by_H + c = 0$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AO} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} \\ &= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c. \\ |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| &= |-ax_A - by_A - c|. \\ \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| |\cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n})| &= |ax_A + by_A + c|. \\ \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| &= |ax_A + by_A + c|. \\ AH &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\|\vec{n}\|}. \\ AH = d(A, (\mathcal{D})) &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

**Remarque**. Lorsque le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  est unitaire, alors

$$AH = d(A, (\mathcal{D})) = |ax_A + by_A + c|.$$

**Remarque**.

Soit  $(\mathcal{D})$  une droite du plan de vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ , et  $A$  un point du plan.

Le réel

$$p_{\mathcal{D}}(A) = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$$

est indépendant du choix de  $M$  sur la droite  $(\mathcal{D})$ .

En effet si  $H$  est la projeté orthogonal de  $A$  sur  $(\mathcal{D})$ , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}.$$

On en déduit en outre, que  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = AH$  est la distance de  $A$  à  $(\mathcal{D})$ .

## IV/ Équations de cercles

### a) Forme générale

#### Propriété

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(x_A; y_A)$  et de rayon  $R$  est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

#### Démonstration

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2.$$

Exemple : Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Quelle est la nature de l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$  ?

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5 \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  est donc le cercle de centre  $C(3; -1)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

### b) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit  $I(a; b)$  un point du plan,  $(a, b \in \mathbb{R})$ , et  $r$  un réel strictement positif : on note  $\mathcal{C}(I; r)$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ . Soit  $M(x; y)$  un point du plan.

**Définition :** Le système

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une **représentation paramétrique** du cercle  $\mathcal{C}$ .  
 $t$  est le **paramètre**.

### b) Cercle de diamètre donné

#### Propriété

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan. Le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

#### Démonstration

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou } M = B \\ \text{ou } AMB \text{ est un triangle rectangle en } M \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Exemple : Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal.

Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  avec  $A(2; 2)$  et  $B(6; -2)$ .

Soit  $M(x; y)$ . On a  $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-y \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 6-x \\ -2-y \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (2-x)(6-x) + (2-y)(-2-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 12 - 8x + x^2 - 4 - 2y + 2y + y^2 = 0 \end{aligned}$$

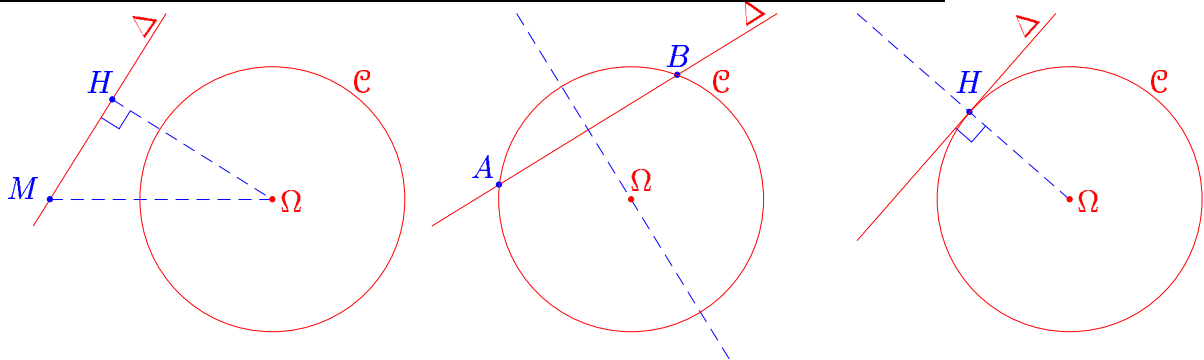
Une équation de  $\mathcal{C}$  est donc  $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ .

## V) Position relative d'une droite et d'un cercle

### Proposition 0.2.1.

Soit une droite  $\Delta$  et un cercle  $\mathcal{C}(\Omega, R)$ .

- ◇ Si  $d(\Omega, R) > R$ ,  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$  ne se rencontrent pas.
- ◇ Si  $d(\Omega, R) < R$ ,  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$  ont exactement deux points communs.
- ◇ Si  $d(\Omega, R) = R$ ,  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$  ont un seul point commun.



*Démonstration.* Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ :  $d(\Omega, \Delta) = \Omega H$ . Un point  $M \in \Delta$  est sur  $\mathcal{C}$  si, et seulement si  $\Omega M^2 = R^2$ . Par le théorème de pythagore, on a:

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d(\Omega, \Delta)^2 + HM^2,$$

et  $M$  appartient à  $\mathcal{C}$  si, et seulement si

$$HM^2 = R^2 - d(\Omega, \Delta)^2.$$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif ou nul. ■

**Vocabulaire:** Dans le dernier cas,  $\Delta$  est dite tangente au cercle en  $H$ ; elle est orthogonale au rayon du cercle.

Regardons analytiquement l'équation d'une tangente:

### Proposition 0.2.2.

L'équation de la tangente au point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

est:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

*Démonstration.* La tangente est la droite passant par  $(x_0, y_0)$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{\Omega M_0}$ . Le centre  $\Omega$  a pour coordonnées  $(a, b)$ , ainsi le vecteur  $\overrightarrow{\Omega M_0}$  a pour composante  $(x_0 - a, y_0 - b)$ . Sont équation est donc

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$xx_0 - ax - x_0^2 + ax_0 + yy_0 - by - y_0^2 + by_0 = 0,$$

donc:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = 0,$$

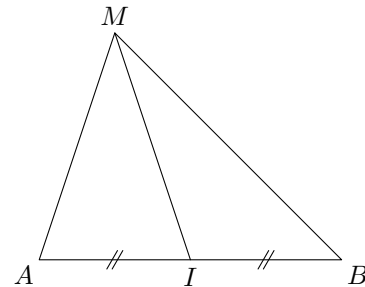
et compte tenu du fait que l'on a  $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$ , on obtient la formule de l'énoncé.

## VI/ Longueurs et angles dans un triangle

### a) Théorème de la médiane

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



*Démonstration*

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $IA = IB = \frac{1}{2}AB$  donc  $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

$$\text{Ainsi } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

*Exemple* :  $ABC$  est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  et  $BC = 12$ . Calculer  $AI$  où  $I$  est le milieu de  $[BC]$ .

D'après le théorème de la médiane :  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ .

$$\text{On a donc } 2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28.$$

$$\text{Ainsi } AI = \sqrt{14}.$$

### b) Formules d'Al Kashi

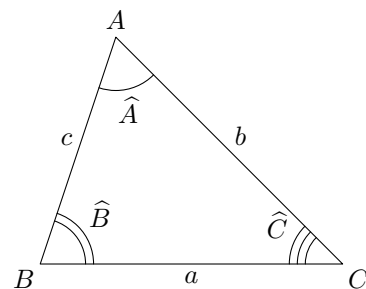
**Propriété**

On considère un triangle  $ABC$ . On pose  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{ABC}$  et  $\hat{C} = \widehat{ACB}$ . On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$



*Démonstration*

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ainsi } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \text{ soit } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

*Exemple* :  $ABC$  est un triangle tel que  $AC = 9$ ,  $AB = 5$  et  $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ . Calculer  $BC$ .

D'après la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$$

$$\text{Ainsi } BC = \sqrt{61}$$

## c) Aire d'un triangle

On considère un triangle  $ABC$  et on appelle  $S$  son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$

*Démonstration*

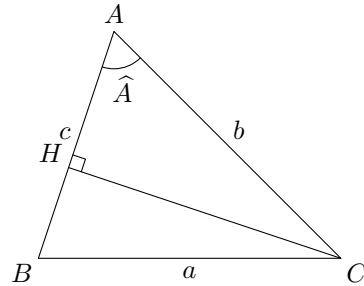
Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $AB$ . On a

$$\text{alors } S = \frac{1}{2}AB \times CH.$$

Si l'angle  $\hat{A}$  est aigu alors  $CH = AC \sin(\hat{A})$ .

Si l'angle  $\hat{A}$  est obtus alors  $CH = AC \sin(\pi - \hat{A}) = AC \sin(\hat{A})$

Dans tous les cas  $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\hat{A})$ .



## d) Formule des sinus

On considère un triangle  $ABC$ . Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

*Démonstration*

$$\text{On a } S = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$

$$\text{donc } \frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

$$\text{ainsi } \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}.$$

*Exemple :  $ABC$  est un triangle tel que  $BC = 5$ ,  $\hat{B} = 50^\circ$  et  $\hat{C} = 75^\circ$ . Calculer  $AB$  et  $AC$  et donner les valeurs arrondies au dixième.*

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 55^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin(\hat{C})} = \frac{AC}{\sin(\hat{B})} = \frac{BC}{\sin(\hat{A})} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin(75^\circ)} = \frac{AC}{\sin(50^\circ)} = \frac{5}{\sin(55^\circ)}$$

$$\text{On a donc } AB = \frac{5 \sin(75^\circ)}{\sin(55^\circ)} \simeq 5,9 \text{ et } AC = \frac{5 \sin(50^\circ)}{\sin(55^\circ)} \simeq 4,7.$$