Chapitre 7

trigonométrie

I) Trigonométrie

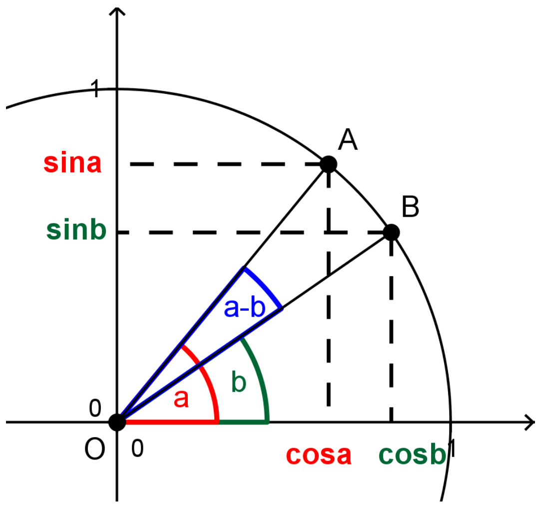
1) Formules d'addition

Théorème 1 : Soit a et b deux angles quelconques, on a les relations

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Démonstration : Soit les point A et B sur le cercle unité :



Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus b par $-b$, on obtient alors :

$$\cos[a-(-b)] = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Pour retrouver les formule avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus, c'est à dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]\\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\end{aligned}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$

$$= \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant b par $-b$ et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\sin[a+(-b)] = \sin a\cos(-b) + \cos a\sin(-b)$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Exemple : En remarquant que :

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

En appliquant les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- ➪ Avec le cosinus on ne "panache pas" tandis qu'avec le sinus on "panache".
- ➪ Avec le cosinus et $a+b$, on met un "moins" entre les deux termes. Avec le sinus pas de problème de signe

2) Formules de duplication

Théorème : Pour tout angle a, on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Démonstration : La formule sur le $\sin 2a$ est l'application directe des formules d'addition. Les formules sur le $\cos 2a$ font intervenir la relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$. En effet :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a)\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

En appliquant la formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} &= \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \\ &= (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

Exemples :

1) Calculer $\cos 2x$ dans les deux cas suivants

a) $\cos x = \dfrac{3}{5}$

b) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{9}{25} - 1 \\ &= \frac{18-25}{25} \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

b) On ne connaît que le sinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{9-2}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2) a est un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

a) Calculer $\cos 2a$.

b) À quel intervalle appartient $2a$. Déduire alors a.

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2\\ &= 2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}-4}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

b) Comme $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2a \in [0;\pi]$, on en déduit donc :

$$2a = \frac{\pi}{6} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{\pi}{12}$$

3) *Formules de linéarisation*

Théorème : Pour tout angle a on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2}\\ \sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}\end{aligned}$$

Démonstration : Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le $\cos 2a$. En effet :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \ \Rightarrow\ 2\cos^2 a = 1+\cos 2a \ \Rightarrow\ \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \ \Rightarrow\ 2\sin^2 a = 1-\cos 2a \ \Rightarrow\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exemple : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
On a :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\\ &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} \\
&= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} \\
&= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$