

CALCULS NUMÉRIQUES

I – Bilan sur les nombres

1. Vocabulaire des différents types de nombres

Définitions

- **Les nombres entiers** : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule.
Par exemple : 0; 1; 2; 354; 2017; -5; -487; ...
- **Les nombres décimaux** : ce sont les nombres avec une virgule et dont le nombre de chiffres après la virgule est limité. Par exemple : 4,5; 23,7891; -6,9; -7841,63; ...
- **Les nombres rationnels** : ce sont ceux qui s'écrivent sous forme de fraction, c'est à dire le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers. Par exemple : $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{120}{13}$; $-\frac{1}{3}$; ...
- **Les nombres irrationnels** : ce sont ceux qui ne font pas parties des catégories précédentes.
Par exemple : π ; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; ...

Propriété

Une fraction est avant tout une division.

Une conséquence directe de cette propriété est que certains nombres appartiennent à différentes catégories :

- $\frac{2}{4} = 2 \div 4 = 0,5$ donc $\frac{2}{4}$ est un nombre décimal écrit sous forme fractionnaire.
- $4,3 = 43 \div 10 = \frac{43}{10}$ donc 4,3 est un nombre décimal et rationnel.

Remarque

Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux et tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels.

Exemples :

$$4 = 4,000; 25 = 25,000; \dots$$

$$1,5 = \frac{15}{10}; 153,47 = \frac{153,47}{100}; \dots$$

$$5 = \frac{5}{1}; 871 = \frac{871}{1}; \dots$$

Oral :

–

En classe :

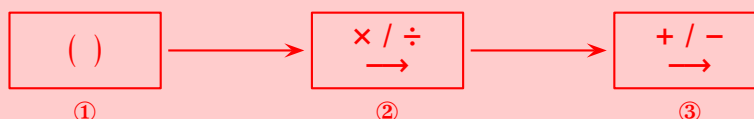
1 p. 243

À la maison :

2, 3, 4 p. 243

2. Priorités opératoires

Propriété : « ordre des priorités »



Exemple 1 :

$$\begin{aligned} 8 - 14 + (-5) \times 3 &= 8 - 14 + \underbrace{(-5) \times 3} \leftarrow \text{on commence par la multiplication} \\ &= \underbrace{8 - 14} + (-15) \leftarrow \text{on effectue les calculs restants dans l'ordre} \\ &= (-6) + (-15) \\ &= (-21) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} 5 - 6 \times ((-7) + 11) + 3 &= 5 - 6 \times \underbrace{((-7) + 11)} + 3 \\ &= 5 - \underbrace{6 \times 4} + 3 \\ &= \underbrace{5 - 24} + 3 \\ &= \underbrace{-19 + 3} \\ &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4 \times 3 + (-11)}{10 + 2 \times (-4)} &= \frac{12 + (-11)}{10 + (-8)} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 1 \div 2 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Oral :

-

En classe :

71, 73 p. 18

À la maison :

72, 74, 75, 76, 77 p. 18

3. Les nombres entiers

Définitions

La division euclidienne de 842 par 24 est :

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividende} \rightarrow 842 & \text{Diviseur} \\ -72 & 24 \\ \hline 122 & \downarrow \\ -122 & 35 \\ \hline 2 & \text{Quotient} \\ \text{Reste} \rightarrow & \end{array}$$

On peut alors écrire l'égalité :

$$842 = 24 \times 35 + 2 \leftarrow \text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$$

Définition

Si un nombre b se trouve dans la table de multiplication d'un nombre a , alors on peut dire que :

- ◇ a est un **diviseur** du nombre b ,
- ◇ b est **divisible** par a ,
- ◇ b est un **multiple** du nombre a .

Dans ce cas, la division de b par a donne un reste nul (division euclidienne) ou un quotient entier (division classique).

Exemples : $56 \div 7 = 8$, comme 8 est un nombre entier on peut affirmer que 7 est un diviseur de 56.

$25 \div 2 = 12,5$, comme 12,5 n'est pas un nombre entier on peut affirmer que 2 n'est pas un diviseur de 25.

$4 \times 11 = 44$, donc 44 est un multiple de 4.

$6 \times 5 = 30$, donc 30 est un multiple de 6.

Oral :

-

En classe :

5 p. 243

À la maison :

6, 7, 8 p. 243



Propriété : critères de divisibilité

- Un nombre entier est divisible par 2, s'il est pair (son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8).
- Un nombre entier est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre entier est divisible par 10, si son chiffre des unités est 0.

Exemple 1 : Ces critères nous évitent d'utiliser la calculatrice :

- 129 n'est divisible par 2 car il se termine par 9.
- 129 n'est divisible par 5 car il se termine pas par 0 ou 5.
- 129 est divisible par 3 car $1 + 2 + 9 = 12$ et $12 \div 3 = 4$
- 129 n'est divisible par 9 car $1 + 2 + 9 = 12$ et 12 n'est pas dans la table de 9.
- 129 n'est divisible par 10 car il ne se termine par 0.

Exemple 2 : 1356 est divisible par 2, par 3 et par 5 car :

- 1356 se termine par 6, donc il est divisible par 2.
- 1356 se termine par 6, donc il est divisible par 3.
- $1 + 3 + 5 + 6 = 15$ et $15 \div 3 = 5$, donc il est divisible par 3.

II – Puissances

1. Définitions et formules



Définition

a est nombre non nul et n un nombre entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

Exemples : La puissance 2 se lit « au carré » et la puissance 3 « au cube » :

$$5^2 = \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ fois}} ; \quad (-4)^3 = \underbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}_{3 \text{ fois}} ; \quad (-7)^4 = \underbrace{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}_{4 \text{ fois}} ; \quad \dots$$



Définition

a est nombre non nul et n un nombre entier positif. Alors :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples :

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} ; \quad 12^{-3} = \frac{1}{12^3} ; \quad (-2)^{-12} = \frac{1}{(-2)^{12}}$$

Oral :
57 p. 250

En classe :
–

À la maison :
58, 59 p. 250



Propriété

a est nombre non nul.

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^1 = a.$$

Exemples :

$$5^0 = 1 \quad 2,3^0 = 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \quad 7^1 = 7 \quad 8,95^1 = 8,95$$



Propriété : formules

a et b sont des nombres non nuls ; n et m sont des nombres entiers relatifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemples :

$$2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$$

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

$$(7 \times 8)^3 = 7^3 \times 8^3$$

$$3^2 + 5^2 = 3^2 + 5^2 \neq 8^2 \quad \text{On ne peut pas calculer davantage}$$

$$(4^5)^{-2} = 4^{5 \times (-2)} = 4^{-10}$$

$$6^2 \times 6^{-5} = 6^{2+(-5)} = 6^{-3}$$

$$4^2 \times 5^3 = \quad \text{On ne peut pas calculer}$$

$$((-5)^7)^8 = (-5)^{7 \times 8} = (-5)^{56}$$

$$\frac{6^2}{6^{-5}} = 6^{2-(-5)} = 6^7$$

$$5^3 - 5^2 = 5^3 - 5^2 \neq 5^5 \quad \text{On ne peut pas calculer}$$

Oral :

10, 11, 12 + 21p. 14

En classe :

32, 33 p. 15

À la maison :

34, 35, 36, 37 p. 15

2. Écriture scientifique



Définition

Une **puissance de 10** est un nombre obtenu en élevant 10 à la puissance n , n étant un entier relatif :

• $10^3 = 1\,000$

• $10^{-2} = 0,01$

• $10^5 = 10\,000$

• $10^{-4} = 0,0001$

• $10^8 = 100\,000\,000$

• $10^{-6} = 0,000001$

On rappelle que si l'on a 10^n (avec n positif), alors il y a autant de zéros *après* le "1" que le nombre n . Par contre, si l'on a 10^{-n} (donc avec n est négatif), alors il y a autant de zéros *avant* le "1" et on place une virgule après le premier zéro.

Oral :

13 + 22, 23, 24, 25 p. 14

En classe :

42 p. 15

À la maison :

43, 44, 45, 46, 47 p. 15

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre est une écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre compris entre 1 et 10 (mais différent de 10 : donc $1 \leq a < 10$) et n un nombre entier.

Exemples :

- $4,78 \times 10^3$ est une écriture scientifique car 4,78 est compris entre 1 et 10 et 3 est un nombre entier.
- $2,159 \times 10^{-5}$ est une écriture scientifique car 2,159 est compris entre 1 et 10 et -5 est un nombre entier.
- $45,9 \times 10^2$ n'est pas une écriture scientifique car 45,9 n'est pas compris entre 1 et 10.
- $0,9 \times 10^5$ n'est pas une écriture scientifique car 0,9 n'est pas compris entre 1 et 10.
- $2,5 \times 3^{10}$ n'est pas une écriture scientifique car il n'y a pas de puissance de 10.

Méthode (DÉTERMINER L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE D'UN NOMBRE)

Déterminer l'écriture scientifique de 478,5.

Au brouillon ou dans ma tête :

1. On écrit le nombre sans sa virgule : 4 785.
2. On place la virgule pour obtenir un nombre entre 1 et 10 : 4,785.
3. On compte de combien on a déplacé la virgule par rapport au nombre de départ (ici 2), ce qui nous donne la partie numérique de la puissance : $4,785 \times 10^{-2}$
4. On vérifie s'il faut mettre un "moins" en puissance : si le nombre de départ est inférieur à 1, alors il faut mettre un "moins". Ici ce n'est pas le cas (car $478,5 > 1$), donc pas besoin de moins.

Sur ma feuille :


$$478,5 = 4,78 \times 10^2.$$

À la calculatrice

À la calculatrice, on peut vérifier les écritures scientifique de tout nombre ou de tout calcul.

- ◇ **Pour mettre le mode écriture scientifique sur la calculatrice :**

    , puis   pour quitter l'écran.

L'affichage indique "SCI", prouvant que le mode est activé. Il suffit alors de taper un nombre ou un calcul suivi de  pour que la calculatrice donne le résultat sous forme d'une écriture scientifique.

- ◇ **Pour enlever le mode écriture scientifique sur la calculatrice :**

   , puis   pour quitter l'écran.

Le "SCI" sur l'écran disparaît, prouvant bien qu'on est revenu en mode normal.

Oral :

—

En classe :

62 p. 17

À la maison :

63 p. 17

Exemples 1 :

$$\begin{aligned}31\,200 &= 3,12 \times 10^4 \\253,47 &= 2,5347 \times 10^2 \\0,00084 &= 8,4 \times 10^{-4} \\0,02017 &= 2,017 \times 10^{-2} \\100,001 &= 1,00001 \times 10^2 \\1,234 &= 1,234 \times 10^0\end{aligned}$$

Exemple 2 : Déterminer l'écriture scientifique de $A = 458,6 \times 10^5$

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{458,6}_{\text{on détermine l'écriture scientifique du nombre}} \times 10^5 \\ &= 4,586 \times \underbrace{10^2 \times 10^5}_{\text{on utilise les formules sur les puissances}} \\ &= 4,586 \times 10^{2+5} \\ &= 4,586 \times 10^7. \end{aligned}$$

Exemple 3 : Déterminer l'écriture scientifique de $A = 457,8 \times \frac{10^7}{10^2}$

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= 457,8 \times \frac{10^7}{10^2} \\ A &= 4,578 \times 10^2 \times 10^5 \\ A &= 4,578 \times 10^7 \end{aligned}$$

Exemple 4 : Déterminer l'écriture scientifique de $B = 521 \times \frac{10^2 \times 10^3}{10^{-4} \times 10^{-6}}$

Réponse :

$$\begin{aligned} B &= 521 \times \frac{10^2 \times 10^3}{10^{-4} \times 10^{-6}} \\ B &= 5,21 \times 10^2 \times \frac{10^5}{10^{-10}} \\ B &= 5,21 \times 10^2 \times 10^{15} \\ B &= 5,21 \times 10^{17} \end{aligned}$$

Oral :

17, 18, 19, 20 p. 14

En classe :

2, 7, 9 p. 13 + 64 p. 17

À la maison :

3, 4, 5, 6, 8 p. 13 + 65, 67 p. 17

III – Racines carrées

1. Définitions

Définition

La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif noté \sqrt{a} dont le carré est égal à a .

Exemple : $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$.

Remarque

La racine carrée d'un négatif ne sera pas vue au collège. La calculatrice affiche même une erreur en cas de calcul d'une racine carrée d'un nombre négatif!

Propriété

a est un nombre positif. Alors $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$$\begin{array}{lll} \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{2,4^2} = 2,4 & \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ (\sqrt{7})^2 = 7 & (\sqrt{3,8})^2 = 3,8 & \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{3}{5} \end{array}$$

■ **EXERCICE :** Développer les expressions $(3 + \sqrt{2})^2$; $(2\sqrt{5} - 4)^2$ et $(6\sqrt{2} + \sqrt{7})(6\sqrt{2} - \sqrt{7})$.

Solution : On applique dans l'ordre les identités remarquables 1, 2 puis 3 :

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{2} + 2 \\ &= 11 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\sqrt{5} - 4)^2 &= (2\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 4 + 4^2 \\ &= 4 \times 5 - 8\sqrt{5} + 16 \\ &= 36 - 8\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6\sqrt{2} + \sqrt{7})(6\sqrt{2} - \sqrt{7}) &= (6\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= 6^2 \times (\sqrt{2})^2 - 7 \\ &= 36 \times 2 - 7 \\ &= 72 - 7 \\ &= 65. \end{aligned}$$

2. Opérations sur les racines carrées



Propriété

a et b sont des nombres positifs non nuls.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

- $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20}$
- $\sqrt{14} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{7} \times \sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$
- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

3. Simplifications



Méthode (ÉCRIRE UNE RACINE CARRÉE SOUS LA FORME $a\sqrt{b}$)

Pour écrire $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible, on procède de la manière suivante :

1. On décompose le nombre sous la racine carrée en un produit/quotient dont l'un des nombres est un carré parfait (par exemple, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ; ici $50 = 25 \times 2$).
2. On utilise les formules sur les racines carrées pour séparer la racine en deux.
3. On simplifie la racine carrée du nombre carré!

Par exemple : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Exemple : Écrire $\sqrt{63}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}.$$



Remarque

On ne peut pas calculer des nombres avec des racines carrées différentes (par exemple $3\sqrt{2} + 5\sqrt{7} \neq 8\sqrt{9}$!) De temps en temps, il faudra donc décomposer chaque racine carrée afin de faire apparaître le même carré parfait.

Exemple : Écrire $A = 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{4 \times 6} + 3\sqrt{36 \times 6} - 10\sqrt{6} \\ &= 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} + 3 \times \sqrt{6^2} \times \sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 2 \times 2\sqrt{6} + 3 \times 6\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 4\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 12\sqrt{6} \end{aligned}$$

Problème ouvert : 104 p. 22