

## GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

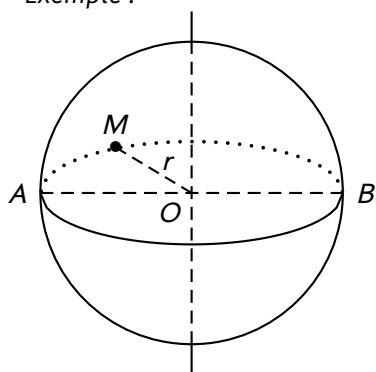
## I – Sphères et boules

## 1. Définitions

## Définitions

- On appelle sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ , l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $OM = r$ .
- On appelle boule de centre  $O$  et de rayon  $r$ , l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $OM \leq r$ .

Exemple :



Les points  $A$ ,  $B$  et  $M$  appartiennent à la sphère ci-contre, on peut donc affirmer que  $OA = OB = r$

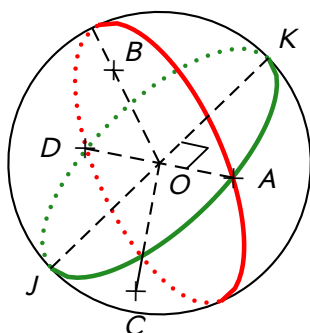
$[AB]$  est un diamètre de la sphère (il joint deux points de la sphère en passant par le centre)

Un cercle qui a pour diamètre un diamètre de la sphère est appelé grand cercle de la sphère. Le cercle en vert est un grand cercle de la sphère.

## Remarque

La sphère est l'enveloppe de la boule comme la peau d'une orange.

## ■ EXERCICE :



La figure ci-contre représente une sphère de centre  $O$  et de rayon 5 cm. Les cercles rouge et vert sont des grands cercles de cette sphère. Ces deux cercles se coupent en  $A$  et  $D$ .  $[JK]$  est un diamètre du cercle vert.

1. Quels points appartiennent à la sphère ?
2. Que vaut  $OK$  ?  $OJ$  ?
3. Que vaut la longueur  $AD$ .
4. Calculer la longueur des grands cercles.

Solution :

1. Les points  $A$  et  $D$  appartiennent aux grands cercles, donc ils appartiennent à la sphère.  $[JK]$  est un diamètre d'un des grands cercles, donc  $J$  et  $K$  appartiennent à la sphère. Conclusion : on peut affirmer que les points  $A$ ,  $D$ ,  $J$  et  $K$  appartiennent à la sphère.
2.  $J$  et  $K$  appartiennent à la sphère qui a pour centre  $O$  et rayon 5 cm, donc  $OJ = OK = 5$  cm.
3.  $A$  et  $D$  sont les points d'intersections de deux grands cercles de la sphère, donc  $[AD]$  est un diamètre de la sphère. Conclusion :  $AD = 2 \times 5 = 10$  cm.
4.  $AD = 10$  cm est le diamètre du grand cercle vert, donc  $\mathcal{P}_{\text{grand cercle}} = 2 \times \pi \times 5 = 10\pi \approx 31,4$  cm.

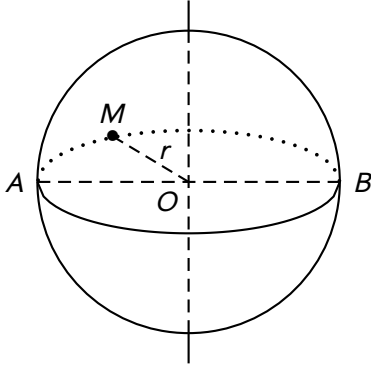
## 2. Aire et volume



### Volume d'une boule

Le **volume d'une boule** se calcule grâce à la formule :  $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$  où  $r$  est le rayon de la boule.

Exemple :



Question : calculer le volume de la boule ci-contre.

Réponse :

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \leftarrow \text{on applique la formule, ici le rayon vaut 5 cm}$$

$$V_{\text{boule}} = \frac{500}{3} \times \pi \text{ cm}^3 \leftarrow \text{calcul 4} \times 5^3, \text{ a numérateur}$$

$$V_{\text{boule}} \approx 524 \text{ cm}^3 \leftarrow \text{on calcule la valeur approchée demandée}$$

**Donnée :**

Boule de rayon  $r = 5 \text{ cm}$ .

Oral :

—

En classe :

—

À la maison :

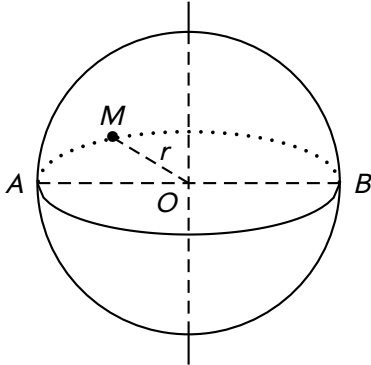
85 p. 253



### Aire de la sphère

L'**aire de la sphère** se calcule grâce à la formule :  $4 \times \pi \times r^2$  où  $r$  est le rayon de la sphère.

Exemple :



Question : calculer le volume de la boule ci-contre

Réponse :

$$A_{\text{sphère}} = 4 \times \pi \times 6^2 \leftarrow \text{on applique la formule, ici le rayon vaut 6 cm}$$

$$A_{\text{sphère}} = 248 \times \pi \text{ cm}^2 \leftarrow \text{on calcule 4} \times 6^2$$

$$A_{\text{sphère}} \approx 452 \text{ cm}^2 \leftarrow \text{on calcule la valeur approchée demandée}$$

**Donnée :**

Boule de rayon  $r = 6 \text{ cm}$ .

## II – Rappels : autres volumes



### Formules

Volumes des solides sans pointe  
(prisme, pavé, cube ou cylindre) :

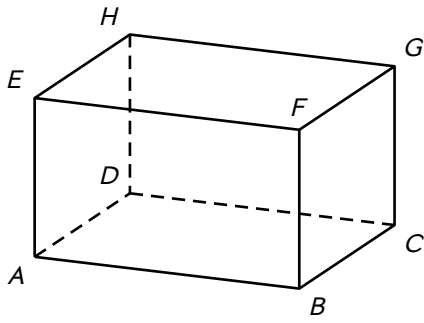
$$V = B \times h,$$

Volumes des solides avec pointe  
(cône ou pyramide) :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h,$$

où  $B$  désigne l'aire de la base du solide et  $h$  sa hauteur.

Exemple 1 :



$ABCDEFGH$  est un pavé tel que :  
 $AB = 8 \text{ cm}$ ;  $BC = 5 \text{ cm}$  et  $GC = 3 \text{ cm}$ .

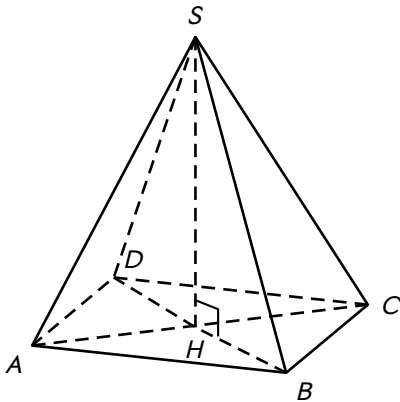
Aire de la base :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= 8 \times 5 \\ \mathcal{A}_{ABCD} &= 40 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Volume de  $ABCDEFGH$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDEFGH} &= 40 \times 3 \\ \mathcal{V}_{ABCDEFGH} &= 120 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Exemple 2 :



$SABCD$  est une pyramide à base rectangulaire  
 $ABCD$  telle que :

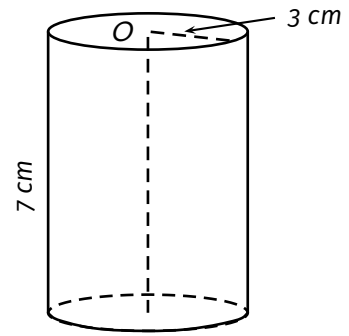
- $AB = 6 \text{ cm}$  et  $BC = 2,5 \text{ cm}$ ,
- $SH = 7 \text{ cm}$ .

Aire de la base :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= 6 \times 2,5 \\ \mathcal{A}_{ABCD} &= 15 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Volume de la pyramide :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{SABCD} &= \frac{1}{3} \times 15 \times 7 \\ \mathcal{V}_{SABCD} &= 35 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

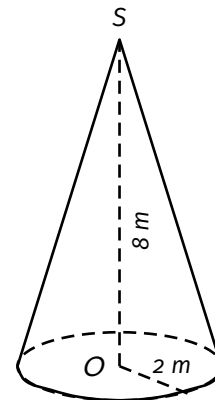


Aire du disque de base :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{base} &= \pi \times 3 \times 3 \\ \mathcal{A}_{base} &= 9\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Volume du cylindre :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{cylindre} &= 9\pi \times 7 \\ \mathcal{V}_{cylindre} &= 63\pi \text{ cm}^3 \\ \mathcal{V}_{cylindre} &\approx 198 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Aire du disque de base :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{base} &= \pi \times 2 \times 2 \\ \mathcal{A}_{base} &= 4\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Volume du cône :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{cône} &= \frac{1}{3} \times 4\pi \times 8 \\ \mathcal{V}_{cône} &= \frac{32}{3}\pi \text{ m}^3 \\ \mathcal{V}_{cône} &\approx 33,5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Oral :

—

En classe :  
80 p. 253

À la maison :  
81, 82, 83, 84 p. 253

### III – Sections de solides

#### 1. Section d'une sphère

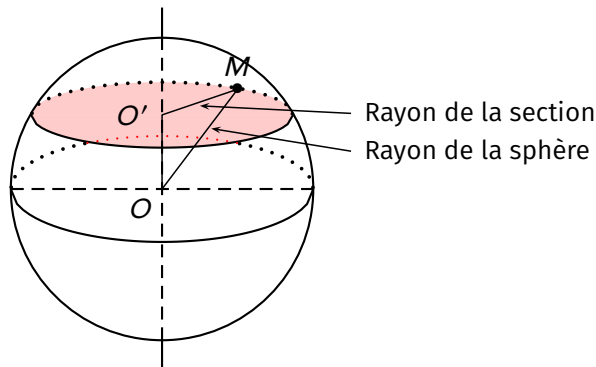
##### Définition

La section d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  par un plan est un cercle de centre  $O'$  et de rayon  $r'$ .

##### Propriété

$(OO')$  est perpendiculaire au plan et  $0 \leq r' \leq r$

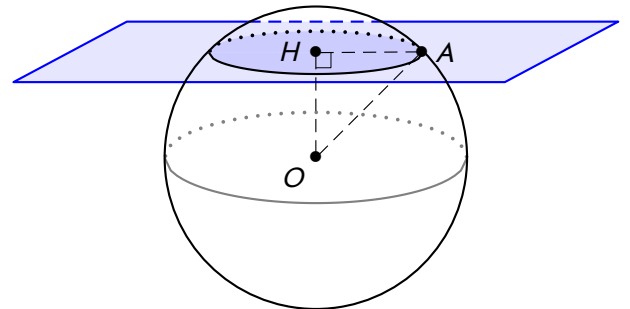
##### Illustration



##### Exemple :

La sphère ci-contre est de centre  $O$  et de rayon  $OA = 7$  cm. On coupe cette sphère par un plan à 4 cm de son centre, on note  $H$  le centre de la section obtenue.

1. Quelle est la nature de la section ?
2. Calculer le rayon  $HA$  de cette section.
3. Calculer l'aire de cette section.



##### Réponses :

1. La section d'une sphère par un plan est un cercle, donc la section de cette sphère est un cercle de centre  $H$  et de rayon  $[HA]$ .
2. D'après la propriété précédente,  $(OH)$  et  $(AH)$  sont perpendiculaires.  $OAH$  est un triangle rectangle en  $H$ , donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$

$$HA^2 = 7^2 - 4^2$$

$$HA^2 = 33$$

$$HA = \sqrt{33}$$

$$HA \approx 5,7 \text{ cm}$$

3.  $[HA]$  est un rayon de la section, on a donc :

$$\mathcal{A}_{\text{section}} = \pi \times 5,7^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{section}} = 32,49\pi \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{section}} \approx 102 \text{ cm}^2$$

Oral :  
8 p. 176

En classe :  
—

À la maison :  
—

## 2. Sections d'un pavé droit (ou d'un prisme)

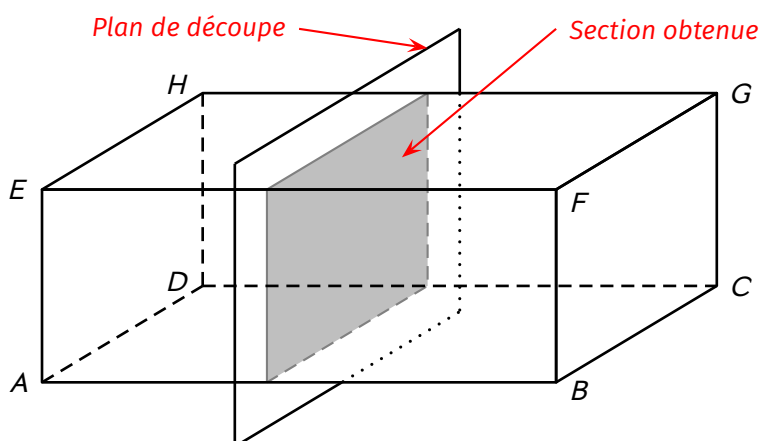
### Définitions (rappels)

- Un **pavé droit** (ou **parallélépipède rectangle**) est un solide dont les six faces sont des rectangles.
- Un **cube** est un solide dont les six faces sont des carrés.

### Propriété : section parallèle à une face (ou une base)

- ◊ La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle. La section obtenue a donc les mêmes dimensions que cette face.
- ◊ La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une base est de la même forme que la base, ainsi que la même dimension.

Exemple :

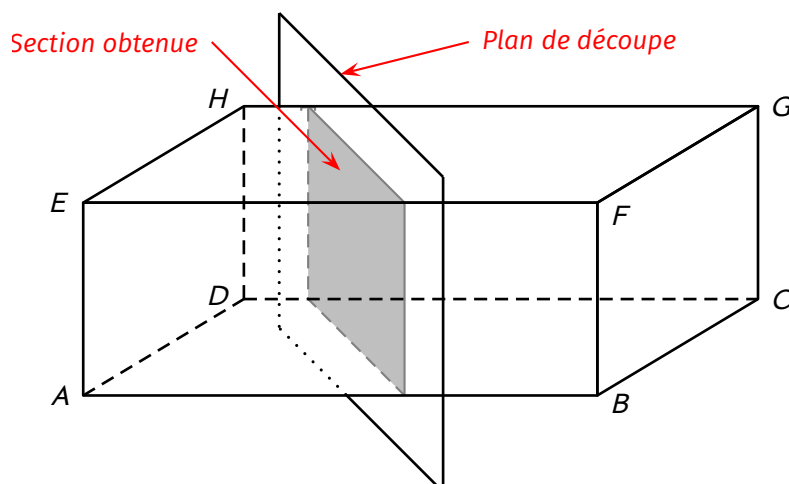


$ABCDEFGH$  est un pavé droit, donc la section par un plan parallèle à  $ADHE$  en grise est un rectangle de même dimension que  $ADHE$ .

### Propriété : section par un plan parallèle à une arête latérale

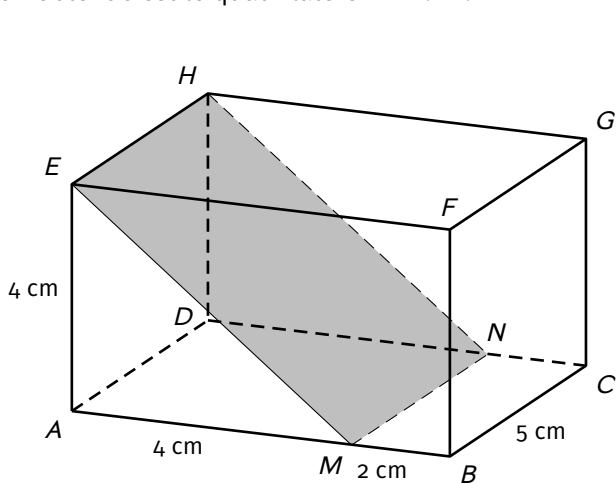
- ◊ La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une de ses arêtes est un rectangle. Les dimensions de la section obtenue se calculent en général avec le théorème de Pythagore.
- ◊ La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une de ses arêtes latérales est également un rectangle. Sauf cas particulier, on ne demandera pas de calculer ses dimensions...

Exemple :



$ABCDEFGH$  est un pavé droit, donc la section par un plan parallèle à  $[HD]$  en grise est un rectangle.

■ **EXERCICE** : Le parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  ci-dessous a été coupé par un plan parallèle à l'arête  $[BC]$ . La section obtenue est le quadrilatère  $EHNM$ .



1. Quelle est la nature du quadrilatère  $EHNM$ ?
2. Calculer la longueur  $EM$ . Donner la valeur exacte et l'arrondi au mm.
3. Dessiner la section  $EHNM$  en vraie grandeur.
4. Calculer la volume du prisme droit  $BMEFCNHG$ .

Solution :

1.  $ABCDEFGH$  est un pavé droit et la section  $EHNM$  est obtenue après la coupe par un plan parallèle à  $[BC]$ , donc  $EHNM$  est un rectangle.
2.  $ABCDEFGH$  est un pavé droit et  $EHNM$  est la section obtenue par une coupe parallèle à  $[BC]$  donc  $EAM$  est un triangle rectangle en  $A$ .

D :  $EAM$  est un triangle rectangle en  $A$ .

P : Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$C : EM^2 = EA^2 + AM^2$$

$$EM^2 = 4^2 + 4^2$$

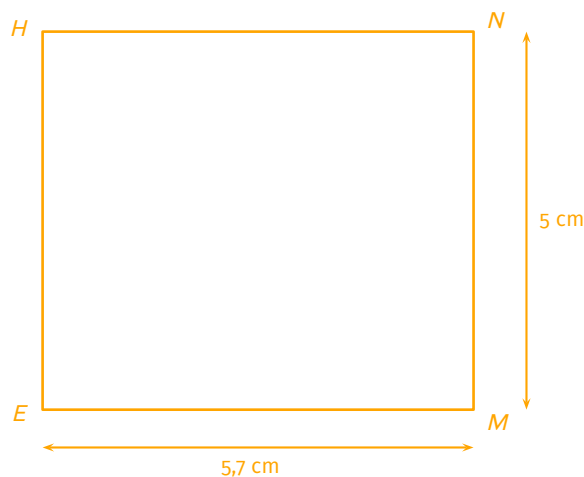
$$EM^2 = 32$$

$$EM = \sqrt{32}$$

$$EM \approx 5,7 \text{ cm}$$

Conclusion :  $EM$  a pour valeur exacte  $\sqrt{32}$  cm et comme valeur approchée 5,7 cm.

3. Les questions précédentes et l'énoncé nous donnent :  $EMNH$  est un rectangle,  $EM \approx 5,7$  cm et  $EH = 5$  cm. La section en vraie grandeur est donc :



4. On commence par calculer l'aire de la base  $BMEF$  :

$$\mathcal{A}_{BMEF} = \mathcal{A}_{BAEF} - \mathcal{A}_{AME} = (4 + 2) \times 4 - \frac{4 \times 4}{2} = 24 - 8 = 16 \text{ cm}^2.$$

On a alors :

$$\mathcal{V}_{BMEFCNHG} = \mathcal{A}_{BMEF} \times BC = 16 \times 5 = 80 \text{ cm}^3.$$

Oral :

6, 7, 9, 10, 12, 13 p. 176

En classe :

19a, 20a, 26 p. 177 + 27, 29 p. 178

À la maison :

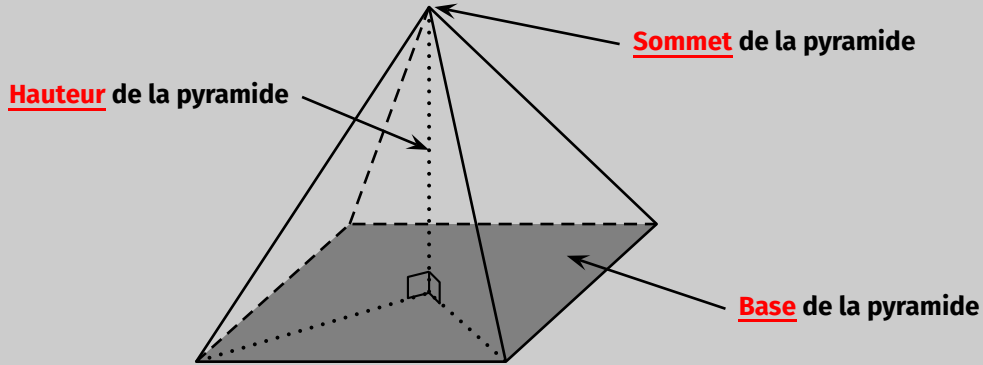
19b, 20b p. 177 + 28, 30, 32 p. 178

## IV – Section d'une pyramide (ou d'un cône)

### Définitions

Une **pyramide** est un solide dont :

- une face, la base, est un polygone qui ne contient pas le sommet de la pyramide;
- les faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun : le sommet de la pyramide.

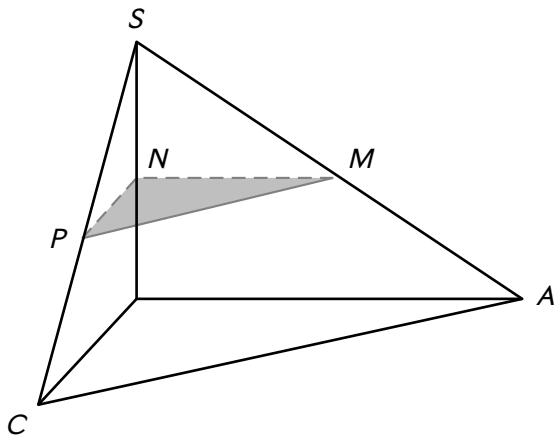


La **hauteur** est perpendiculaire à la base et passe par le sommet de la pyramide. Enfin, un **cône** (de révolution) est une sorte de pyramide dont la base est un disque (ce n'est pas un polygone, ce qui explique que le cône n'appartient pas à la famille des pyramides).

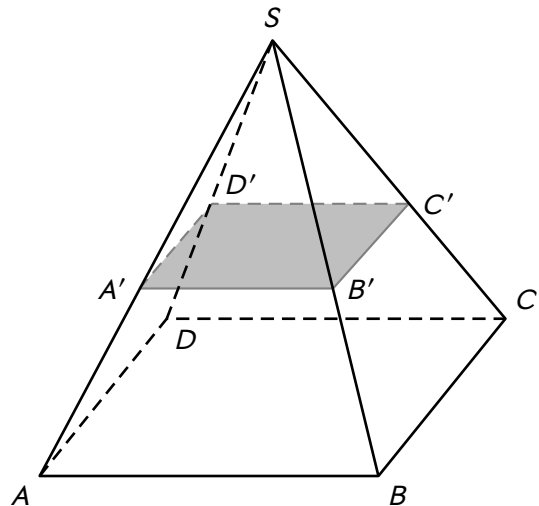
### Propriété

La section d'une pyramide (ou d'un cône) par un plan parallèle à la base est une figure de la même forme que la base. La section obtenue est une réduction de la base.

Exemples :



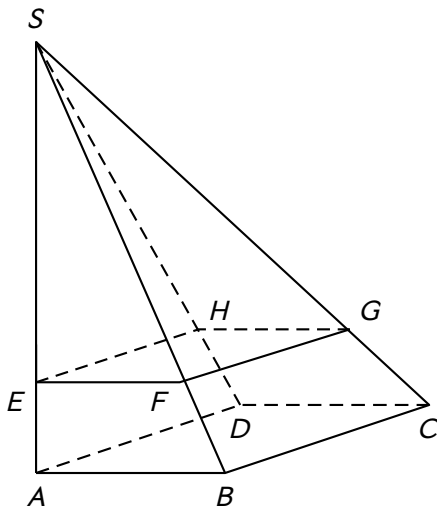
$SABC$  est une pyramide à base triangulaire.  
 $MNP$  est la section de  $SABC$  parallèlement à la base  $ABC$ .  
Donc  $MNP$  est un triangle qui est une réduction de  $ABC$ .



$SABC$  est une pyramide à base rectangulaire.  
 $A'B'C'D'$  est la section de  $SABCD$  par un plan parallèle à  $ABCD$ .  
Donc  $A'B'C'D'$  est un rectangle qui est une réduction de  $ABCD$ .

On va terminer ce chapitre par un exercice de type brevet.

■ EXERCICE (DE BREVET) :



$SABCD$  est une pyramide à base rectangulaire  $ABCD$ , de hauteur  $[SA]$ . On donne  $SA = 15$  cm,  $AB = 8$  cm et  $BC = 11$  cm.

1. Calculer le volume  $V_1$  de la pyramide  $SABCD$ .
2. Démontrer que  $SB = 17$  cm.
3. On note  $E$  le point de  $[SA]$  tel que  $SE = 12$  cm et  $F$  le point de  $[SB]$  tel que  $SF = 13,6$  cm.

On coupe cette pyramide par le plan passant par  $E$  et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide  $SEFGH$  ainsi obtenue, est une réduction de la pyramide  $SABCD$ .

- (a) Quelle est la nature de  $EFGH$ ?
- (b) Quel est le coefficient de la réduction?
- (c) En déduire le volume  $V_2$  de la pyramide  $SEFGH$ .

Solution :

1. Calcul de l'aire de la base :  $\mathcal{A}_{ABCD} = 8 \times 11 = 88 \text{ cm}^2$ .

Calcul du volume de  $SABCD$  :  $V_1 = \frac{1}{3} \times 88 \times 15 = 440 \text{ cm}^3$ .

2.  $[SA]$  est la hauteur de  $SABCD$  donc  $SAB$  est un triangle rectangle en  $A$ .

**D**  $SAB$  est un triangle rectangle en  $A$ .

**P** Donc d'après le théorème de Pythagore on a :

**C**  $SB^2 = SA^2 + AB^2$

$$SB^2 = 15^2 + 8^2$$

$$SB^2 = 289$$

$$SB = \sqrt{289}$$

$$SB = 17 \text{ cm}$$

3. (a)  $EFGH$  est un rectangle.

(b) Le coefficient de réduction est  $\frac{SE}{SA} = \frac{12}{15} = 0,8$ .

- (c) On utilise le coefficient de réduction, donc le volume de  $SEFGH$  est :

$$V_2 = 0,8^3 \times V_1 = 0,512 \times 440 = 225,28 \text{ cm}^3$$

Oral :  
11, 14, 15 + 16, 17 p. 176

En classe :  
2, 5 p. 175 + 38a, 39 p. 179

À la maison :  
3, 4 p. 175 + 38b, 40, 41, 42 p. 179 + 43 p. 180

Tâche complexe : 78 p. 187 / Problème ouvert : 69 p. 184