Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers

I) L'ensemble $\mathbb{N}$

Les entiers naturels sont les entiers positifs. Par exemple, 0, 1, 2 et 5676 sont des entiers naturels. Par contre -45 n'en est pas un.
Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$ comme naturel.
On dit que ces entiers sont naturels car ce sont ceux que l'on utilise naturellement dans la vie de tous les jours.
Il existe une infinité d'entiers naturels.

notations : $\mathbb{N}=\{0 ; 1 ; 2 ; ... ; n ; ...\}$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ($\mathbb{N}$ privé de 0).

Remarque : La soustraction et la division ne sont pas toujours possibles dans $\mathbb{N}$, en effet :

- ✓ Si $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ alors $(a-b)\in\mathbb{N}$ seulement si $a\geq b$.
- ✓ Si $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$ alors $\frac{a}{b}\in\mathbb{N}$ seulement si a est un multiple de b.

Exemples :

- ✓ $8-5=3$, $3\in\mathbb{N}$ et on a bien $8\geq 5$.
- ✓ $5-8=-3$, $-3\notin\mathbb{N}$ et $5\leq 8$.
- ✓ $\frac{12}{3}=4$, $4\in\mathbb{N}$ possible car $12=4\times 3$.
- ✓ On ne peut diviser 2 par 5 dans $\mathbb{N}$ car $\frac{2}{5}\notin\mathbb{N}$.

II) Diviseurs et multiples d'un nombre entier naturel

1) La division Euclidienne

a) Exemples :
Compléter : $17=5\times 3+2$ et $658=13\times ...+...$

b) Propriété :
Quel que soit l'entier naturel a et quel que soit l'entier naturel non nul b,
Il existe deux entiers naturels uniques q et r tels que : $a=bq+r$ avec $r\prec q$
Cette opération est appelée, la division Euclidienne de l'entier naturel a par l'entier naturel b l'entier q est le quotient et l'entier r est le reste de la division Euclidienne de a par b

Moutamadris.ma

c) Application :

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre 12357 par 113

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre donné par 7 ?

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre donné par 7 ?

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre donné par 2

2)Définition :

Soit a $\in$ IN, b $\in$ IN* : on dit que b est un **diviseur de** a s'il existe un entier naturel k tel que a = k×b

On dit aussi que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a.

remarque : tout nombre entier naturel non nul *a* admet au moins deux diviseurs, 1 et *a*.

ex : $12 = 4 \times 3 = 1 \times 12 = 6 \times 2$

4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12

par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car $12 \div 5 \notin$ IN

3)Critères de divisibilité

Un nombre est divisible

par 2 si le nombre se termine par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6, 8

par 3 si la somme des chiffres du nombres est divisible par 3

par 5 si le nombre se termine par 0 ou 5

par 9 si la somme des chiffres du nombre est divisible par 9

III)Les nombres pairs et impairs

Activité : Ecris ces nombres sous la forme 2x ... ou (2x ...) +1 les nombres suivants :

68 ;69; 86 ; 87 ; 92; 93

Solutions :

68 = 2 x 34 69 = (2 x 34) + 1 86 = 2 x 43 87 = (2 x 43) + 1 92 = 2 x 46

93 = (2 x 46) + 1

Règle 1 : Les nombres pairs sont terminés par 0, 2, 4, 6, 8 Les nombres impairs sont terminés par 1, 3, 5, 7, 9

Règle 2 : un nombre pair peut s'écrire 2x ...

un nombre impairs peut s'écrire 2x ...+1

définition1 :on dit qu'un nombre pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un entier naturel k tel que n = 2.k

Exemple : 6 = 2 x 3 k =3 donc 6 est nombre pair

Définition2 :on dit qu'un nombre impair s'il existe un entier naturel k tel que n = 2.k+1

Exemple : 11 = 2 x 5+1 k =5 donc 11 est nombre impair

Exercice : Montrer que la somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.

Exercice : Montrer que la produit de Deux nombres consécutifs est un nombre pair

IV) .NOMBRES PREMIERS

a) **Définition** Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs :

1 et lui-même

exemples : 7 est un nombre premier car les seuls diviseurs de 7 sont 7 et 1.

4 n'est pas premier car il est divisible par 2.

12 n'est pas premier et 5 est premier

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Remarques:1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair

Il y a une infinité de nombre premier

Moutamadris.ma

b) Décomposition en produit de facteurs premiers

Par exemple, 15 n'est pas premier : $15 = 5 \times 3$. Les nombres 5 et 3 sont premiers. Ainsi le nombre 15 est égal à un produit de nombres premiers.

Théorème1 : tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers

Exemples : $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 22 \times 7$ C'est trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre. $50 = 2 \times 52$; $360 = 23 \times 32 \times 5$

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Remarque : on peut démontrer que cette décomposition est unique.

Application1 :

1. Simplifier des fractions

$$\frac{84}{60} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{5} \leftarrow$$ fraction irréductible

2. Simplifier des racines carrées

$$\sqrt{2100} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7}$$
$$= \sqrt{\left(2^2 \times 5^2\right) \times 3 \times 7}$$
$$= \sqrt{(2 \times 5)^2} \times \sqrt{3 \times 7}$$
$$= 2 \times 5 \times \sqrt{21}$$
$$= 10\sqrt{21}$$

V) . le plus grand commun diviseur

1) Définition

Soient a et b deux entiers non nuis.
Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b, on le note PGCD(a ; b) ou a v b

2) Exemple

Dans IN l'ensemble des diviseurs de 15 est {1 ; 3 ; 5 ; 15}
Dans IN l'ensemble des diviseurs de 12 est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}
L'ensemble des diviseurs communs à 12 et à 15 est donc D(12 ; 15) = {1 ; 3}
On a donc PGCD(15 ; 12) = 3 ou 15 v 12 = 3

3) Propriétés

Soient a et b deux entiers non nuis.

- PGCD(a ; b) <a ; PGCD(a ; b) < b ;
- PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a)
- Si b divise a, alors PGCD(a ; b) = b ou -b

en particulier PGCD(a ; 1) = 1 et PGCD(a ; a) = a

- Soient a et b deux entiers non nuls.

Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
(On a : a = bxq + r) Alors Si r = 0, PGCD(a ; b) = b
Si r ≠ 0, PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)

Exemple

6 est un diviseur de 18 donc PGCD(6 ; 18) = 6
Pour trouver le PGCD de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804 2414 = 804 x 3 + 2
On en déduit alors PGCD(2414 ; 804) = PGCD(804 ; 2)
Il est immédiat que PGCD(804 ; 2) = 2 car 2 divise 804. Donc PGCD(2414 ; 804) = 2

Moutamadris.ma

4) AUTRES METHODES POUR TROUVER LE PGCD

a) théorème :

Soient a et b deux entiers non nuis décomposées en produits de facteurs premiers
Le PGCD(a,b). est égal au produit des facteurs premiers communs dans leurs décompositions ;chacun d'eux étant affecté d'un exposant égal au plus petit des exposants avec lesquels il figure dans les nombres considères

Exemple

$50 = 2 \times 5^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$56 = 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7$

$14 = 2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$

Donc PGCD(50 ; 360) = $2 \times 5 = 10$
Donc PGCD(60 ; 50) = $2 \times 5 = 10$
Donc PGCD(56 ; 14) = $2 \times 7 = 14$
Donc PGCD(56 ; 42) = $2 \times 7 = 14$
Donc PGCD(24 ; 60) = $2^2 \times 3 = 12$

b) Algorithme d'Euclide

Remarque

En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives : de a par b, puis du diviseur par le reste, ...
le premier reste non nul est le PGCD de a et de b. C'est l'algorithme d'Euclide
Suivant les nombres a et b, le nombre d'itérations à effectuer peut-être plus ou moins grand.

Exemple

Pour déterminer le PGCD de 410258 et de 126 écrivons les divisions euclidiennes successives :

410258 = 126 x 3256 + 2
126 = 2 x 63 + 0

Donc PGCD(410258 ; 126) = 2

Pour déterminer le PGCD de 15648 et de 657 écrivons les divisions euclidiennes successives :

15648 = 657 x 23 + 537
657 = 537x 1 + 120
537 = 120 x 4 + 57
120 = 57 x 2 + 6
57 = 6 x 9 + 3
6 = 3 x 2 + 0

Donc PGCD(15648 ;657) = 3

VI) . le plus petit commun multiple

1-Définition

Soient a et b deux entiers non nuls.
L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément. Ce plus petit élément est appelé "plus petit commun multiple de a et b.
On le note PPCM(a ; b).

Exemple

$170 = 2 \times 5 \times 17$

$68 = 2 \times 2 \times 17 = 2^2 \times 17$

$220 = 2 \times 2 \times 5 \times 11 = 2^2 \times 5 \times 11$

$340 = 2 \times 2 \times 5 \times 17 = 2^2 \times 5 \times 17$

Donc PPCM (68 ; 170) = $2^2 \times 5 \times 17 = 340$

Donc PPCM (220 ; 340) = $2^2 \times 5 \times 11 \times 17 = 3740$

2-Propriétés

Soient a et b deux entiers naturels non nuis.

- PGCD(a ; b) divise PPCM(a ; b)
- PGCD(a ; b) x PPCM(a ; b) = a x b

Moutamadris.ma

• Si a et b sont premiers entre eux, on a PPCM(a ; b) = a x b
• Si k est un entier non nul, on a PPCM(ka ; kb) = k PPCM(a ; b)
• Soient a et b deux entiers naturels non nuis.
L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble des multiples de leur PPCM.

Exercice : simplifier une expression avec radicaux : $B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$

on décompose chacun des nombres 63 et 105.

$63 = 3 \times 21 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$ et $105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$

d'où $B = \sqrt{63 \times 105} = \sqrt{3^2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 7} = 3 \times 7 \sqrt{3 \times 5} = 21 \sqrt{15}$.

Moutamadris.ma