

FONCTIONS - Généralités

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

Chapitre n° 1

I) Définitions et Domaine de définitions.

- 1 Définitions
- 2 Exemples
- 3 Domaine de définitions.

Chapitre n° 2

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

- 1 Egalité de deux fonctions
- 2 Représentations graphique

Chapitre n° 3

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

- 1 Définitions
- 2 le graphe et la parité de la fonction

Chapitre n° 4

IV) Les variations d'une fonction numérique

- 1 Fonction croissante -décroissante -fonction constantes
- 2 Le taux d'accroissement d'une fonction

Chapitre n° 5

V) Les extremums d'une fonction numérique

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$

IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax + b}{cx + d}$

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions

Définition : Une fonction est un procédé qui à un nombre x appartenant à un

ensemble D associe un nombre y . On note : $x \xrightarrow{f} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

2°) Exemples

Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4} \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{2x - 1}{5x - 4} \quad \text{où} \quad l(x) = \sqrt{x} \quad \text{où}$$

$$R(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonction homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

l S'appelle la fonction racine carrée

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple 1

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1) Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f ,

Réponses : 1) $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et $f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$2) f(x) = 2 \text{ ssi } 3 \times x^2 - 1 = 2$$

$$\text{ssi } 3 \times x^2 = 2 + 1 \text{ ssi } 3 \times x^2 = 3 \text{ ssi } x^2 = 1$$

$$\text{ssi } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

Exemple 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2$

Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	-2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$f(x)$						

3°) Domaine de définitions

ACTIVITES

a. On considère la fonction définie par : $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \xrightarrow{g} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \xrightarrow{h} \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

DEFINITION

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par

- 1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$.
- 2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$.
- 3) $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$.
- 4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$.
- 5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$.
- 6) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.
- 7) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$.
- 8) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.
- 10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$.
- 11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.
- 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.
- 13) $f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3}$.
- 14) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$.
- 15) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.
- 16) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+4}$.
- 17) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$.
- 18) $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.
- 19) $f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}$.
- 20) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.
- 21) $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$.

Solutions

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$$

$$2x-4=0 \text{ ssi } x = \frac{4}{2} = 2 \text{ Donc } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

$$3) f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 4}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ ssi } x^2 - 2^2 = 0 \text{ ssi } (x-2)(x+2) = 0$$

$$\text{ssi } x-2=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ssi } x=2 \text{ ou } x=-2$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$4) f(x) = \frac{7x-1}{x^3 - 2x}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\}$$

$$x^3 - 2x = 0 \text{ ssi } x(x^2 - 2) = 0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2 - 2 = 0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2 = 2$$

$$\text{ssi } x=0 \text{ ou } x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$5) f(x) = \sqrt{-3x+6}.$$

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$$

$$-3x+6 \geq 0 \text{ ssi } -3x \geq -6 \text{ ssi } x \leq \frac{-6}{-3} \text{ ssi } x \leq 2$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 2]$$

$$6) f(x) = \frac{x-5}{2x^2 - 5x - 3}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad a=2 \text{ et } b=-5 \text{ et } c=-3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$$

$$7) f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 \geq 0\} \text{ soit } \Delta \text{ son discriminant}$$

$$a=2 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\}$

$-9x+3=0$ ssi $-9x=-3$ ssi $x=\frac{1}{3}$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	$+$	0	$-$

Donc $D_f = \left] -1, \frac{1}{3} \right]$

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0 \right\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$ Donc on a deux racines

$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2} \right]$

10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0 \right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$$16) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$17) f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f =]-\infty, 0[$$

$$18) f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \text{ ssi } |2x-4| = |x-1|$$

$$\text{ssi } 2x-4 = x-1 \text{ ou } 2x-4 = -(x-1)$$

$$\text{ssi } 2x-x = 4-1 \text{ ou } 2x-4 = -x+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 2x+x=4+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 3x=5 \text{ ssi } x=3 \text{ ou } x=\frac{5}{3}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$$

$$19) f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc: } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$20) f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}}. \quad D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 \neq 0\right\}$$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On détermine les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ et } x_2' = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2+2x+13$	-	○	+	+	+	○	-
x^2-x-6	+		+	○	-	○	+
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	-	○	+		-		+

$$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right].$$

$$21) f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0	+

$$\text{On a donc : } D_f =]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1) Egalité de deux fonctions

Définition :

Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs

on dit que f et g sont égaux et on écrit $f=g$.

si et seulement si :

$D_f = D_g$ et pour tout $x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a $f(x)=g(x)$

Exemple 1 : Soient les deux fonctions : $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \frac{1 + 3x^2}{|x|}$

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$ donc $f(x) = g(x)$

donc finalement on a trouver que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = g(x)$

donc : $f = g$.

Exemple 2 : Soient les deux fonctions : $h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ et $t(x) = x - 1$

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

alors $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

2) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté a un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition : Soit f une fonction , et D_f son domaine de définition

l'ensemble des points $M(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f , souvent notée C_f .

$$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$$

Méthode :

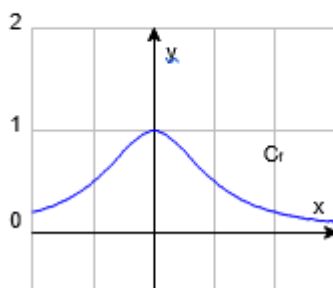
Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple 1 : Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Sur I un l'intervalle $I = [-2; 3]$

Réponses :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exemple 2 : la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une droite d'équation $y = ax + b$

Exemple 3 : Soie f une fonction tq : $f(x) = |2x + 3|$

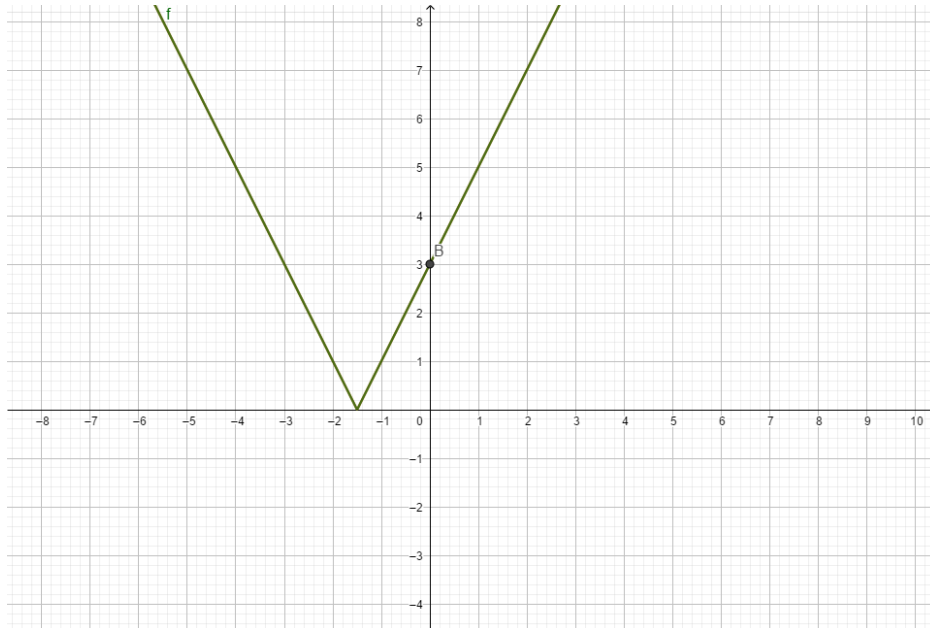
- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$$2x+3=0 \text{ ssi } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f(x) = 2x+3 \\ f(x) = -2x-3 \end{cases}$$

x	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	$+$
$ 2x+3 $	$-2x-3$	$2x+3$

$$\text{Donc } f(x) = 2x+3 \text{ si } x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\text{ et } f(x) = -2x-3 \text{ si } x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$



Exemple 4: Soie f une fonction tq : $f(x) = |x-2| + |x+2|$

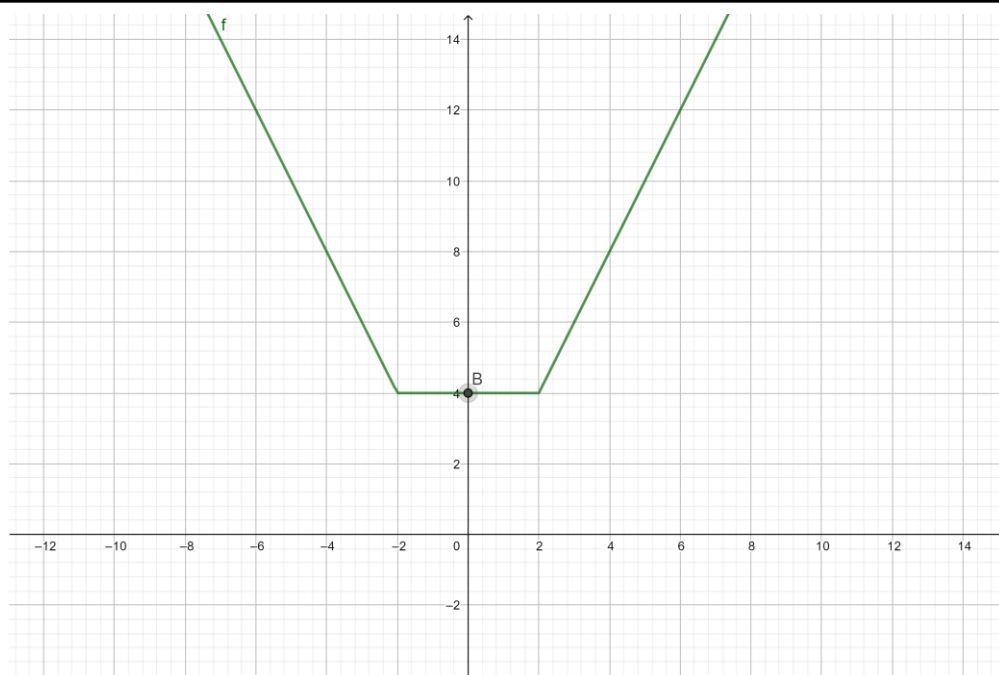
- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$$x+2=0 \text{ ssi } x = -2$$

$$x-2=0 \text{ ssi } x = 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$ x-2 + x+2 $	$-2x$	4	$2x$	

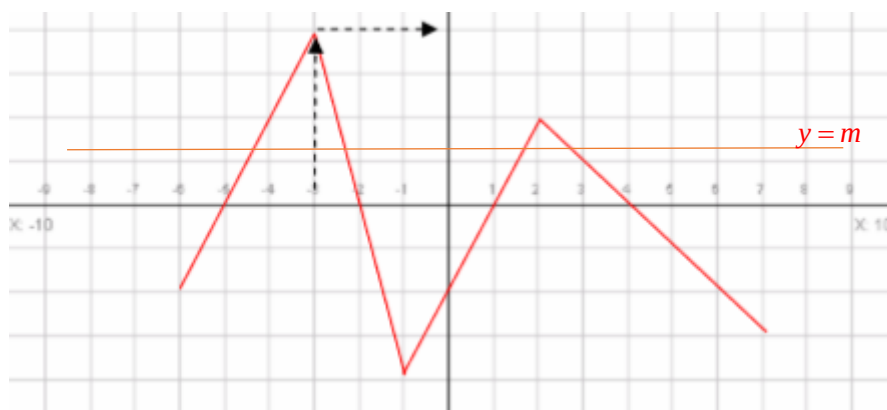
$$\text{Donc } f(x) = -2x \text{ si } x \in]-\infty, -2] \text{ et } f(x) = 4 \text{ si } x \in [-2, 2] \text{ et } f(x) = 2x \text{ si } x \in [2, +\infty[$$



Exemple 5 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6; 7]$

Soie f une fonction Questions : Répondre par lecture graphique :

- 1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
- 2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
- 3- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
- 4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x) = m$
- 5- Résoudre graphiquement $f(x) < 0$
- 6- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$



Réponses : 1) Image de -5 est -4 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4
Image de 0 est -4 Image de 6 est -4

2) Antécédents de -1 sont: -5,5 -1,75 0,5 et 5

Antécédents de 0 sont: -5 -2 1 et 4

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

4) Nombre de solutions de $f(x) = m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m .

Si $m < -4$: pas de solution

Si $m = -4$: une solution

Si: $-4 < m < -3$ deux solutions

Si $-3 < m < -2$: trois solutions

Si $-2 < m < 2$: quatre solutions

Si $m = 2$: trois solutions

Si: $2 < m < 4$ deux solutions

Si $m = 4$: une solution

Si $m > 4$: pas de solution

5) $f(x) < 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. $S = [-6; 7] \cup]-2; 1[\cup]4; 7]$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ donc $S = [-4; 2.5] \cup \{2\}$

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1. Définitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et seulement si :

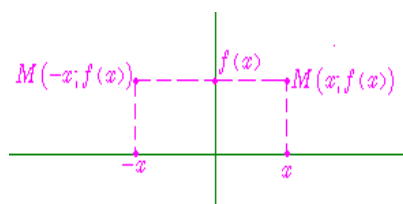
Pour tout réel x , si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$] -\infty, +\infty[$	$] 0, +\infty[$
$^{\circ} * \text{ (ou } ^{\circ} - \{0\})$	$^{\circ} - \{1\}$
$^{\circ} - \{-1; 1\}$	$^{\circ} - \{-1; 2\}$
$[-4; 4]$	$[-4; 3]$

b. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire. (c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

c. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 1 : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
 - $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
 - $f(-x) = f(x)$
- Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
 - $g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$
 - $g(-x) = -g(x)$
- Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \frac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

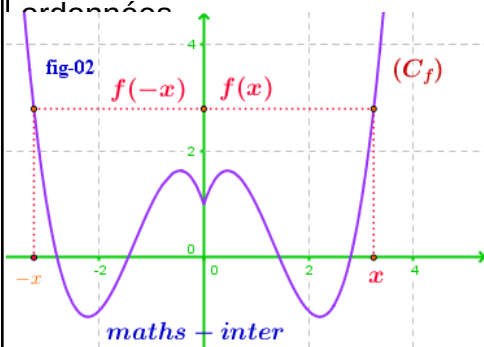
on a $-2 \in D_t$ mais $-(-2) = 2 \notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport à O

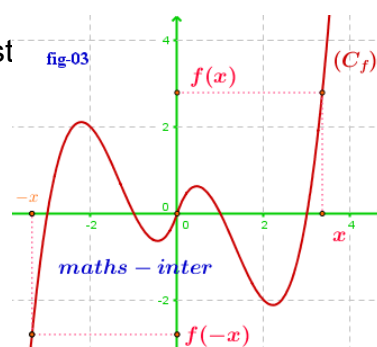
Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

2. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées



fonction impaire est



l'origine.

Application :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. 3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$. 7) . 8) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \text{ on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \text{ on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$- f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$4) f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\}$$

$$1-x^2 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } D_f = [-1, 1]$$

- Pour tout réel x , si $x \in [-1, 1]$, alors $-x \in [-1, 1]$

$$- f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ ssi } x^2 = -5 \text{ pas de solutions}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$- \quad f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

$$6) \quad f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel x , donc $2x^2 + 4 \geq 0 + 4$ donc $2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$- \quad f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$6) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \quad \text{Donc } D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante - fonction constantes

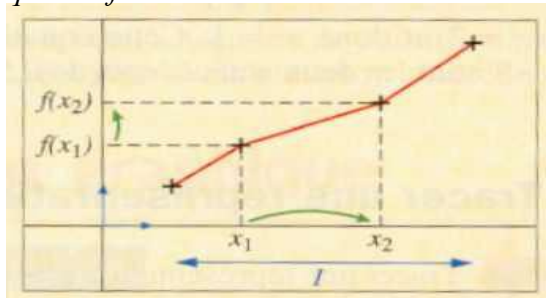
Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$)

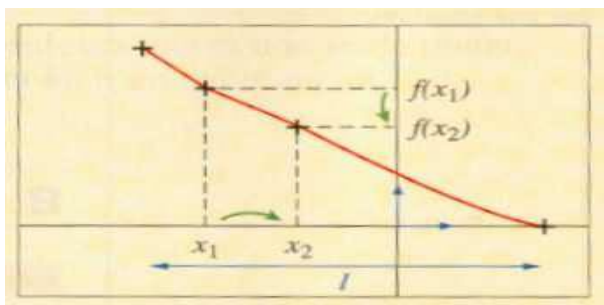
Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».



- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

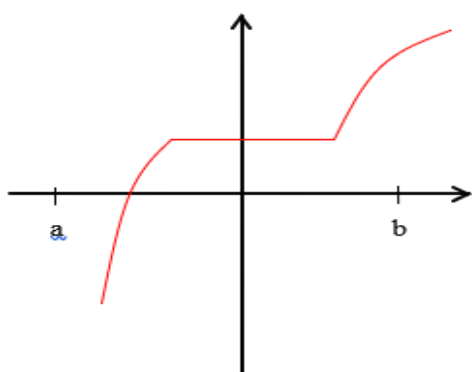


- Dire f que est constante sur I signifie que :

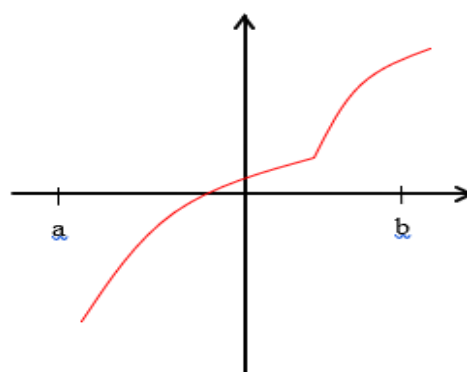
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est :
soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur $[a, b]$, mais
non strictement croissante



Fonction strictement croissante
sur $[a, b]$

Exemple : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 7x - 5$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc $7x_1 < 7x_2$ car $7 > 0$

Donc $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) < f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ tq $x_1 < x_2$

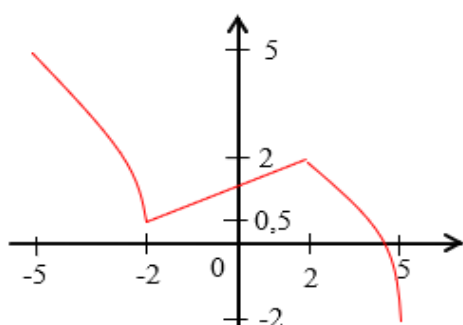
Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3)



x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$

pour tout $x \in I$

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) **Définition :** Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1; x_2)$ est tq : $T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Exemple : Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante (croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ($\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$)
- On dit que f est strictement décroissante (décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ($\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$)
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

Exemple : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$ $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) résumé : **tableau de variation** : $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	

2) Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{x}{x+1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 < -1$ et $x_2 < -1$ Donc $x_1 + 1 < 0$ et $x_2 + 1 < 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$ sur $I =]-\infty; -1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty; -1[$

b) sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > -1$ et $x_2 > -1$ Donc $x_1 + 1 > 0$ et $x_2 + 1 > 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$ sur $J =]-1; +\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1; +\infty[$

c) résumé : **tableau de variation** :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

c) les variations et la parité:

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

consequences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Applications : Soit f une fonction tq : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur $I =]0; 1]$

Soit $x_1 \in]0; 1]$ et $x_2 \in]0; 1]$

Donc $0 < x_1 \leq 1$ et $0 < x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 < 0$ Donc $0 < x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 - 1 < 0$ et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I =]0; 1]$

b) sur $J = [1; +\infty[$

Soit $x_1 \in [1; +\infty[$ et $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 > 1$ Donc $x_1 x_2 - 1 > 0$

et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J = [1; +\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I =]0; 1]$ est l'intervalle $I' = [-1; 0[$ et le symétrique de $J = [1; +\infty[$ est l'intervalle $J' =]-\infty; -1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

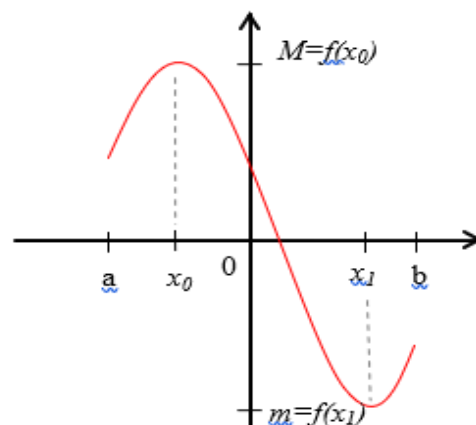
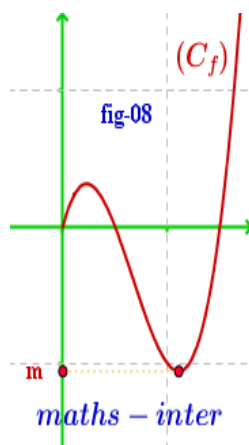
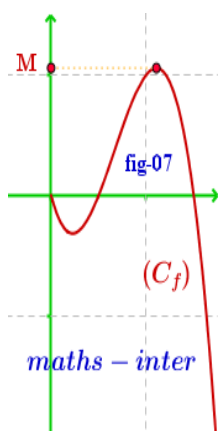
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗ -2			↘ 2	

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

V) Les extremums d'une fonction numérique

1) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$

2) Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = 5x^2 + 3$ $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 > 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = -4x^2 + 1$ $D_g = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 < 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \leq 1$ et on a $g(0) = 1$

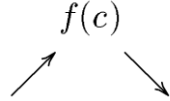
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \leq g(0)$

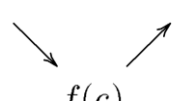
d'où $g(0) = 1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

3) Propriétés

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I = [a; b]$ (a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c \in I$

- Si f est croissante sur $[a; c]$ et décroissante sur $[c; b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I
- Si f est décroissante sur $[a; c]$ et croissante sur $[c; b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a	c	b
$f(x)$	$f(c)$ 		

x	a	c	b
$f(x)$			

Application : Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Reponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$$6 - (2x - 1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

Donc : $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite $-(2x - 1)^2 \leq 0$ donc $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$ alors $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

1° on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire,

Donc il suffit d'étudier la monotonie sur $I = [0; +\infty[$

3° soient $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2}$$

Donc $T(x_1; x_2) = a(x_1 + x_2)$

1ier cas : si $a > 0$

On a : $x_1 \in [0; +\infty[$ donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ donc $x_2 \geq 0$

Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 > 0$

Et on a : $a > 0$ donc sur $[0; +\infty[$ $T(x_1; x_2) > 0$

Et alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2iér cas : si $a < 0$

On a : $x_1 \in]-\infty; 0]$ donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ donc $x_2 \leq 0$

Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 < 0$

Et on a : $a < 0$ donc sur $] -\infty; 0]$ $T(x_1; x_2) < 0$

Et alors f est strictement décroissante croissante sur $[0; +\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a < 0$

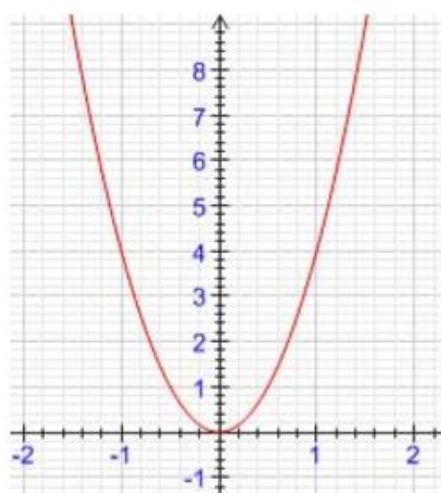
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4° Représentation graphique

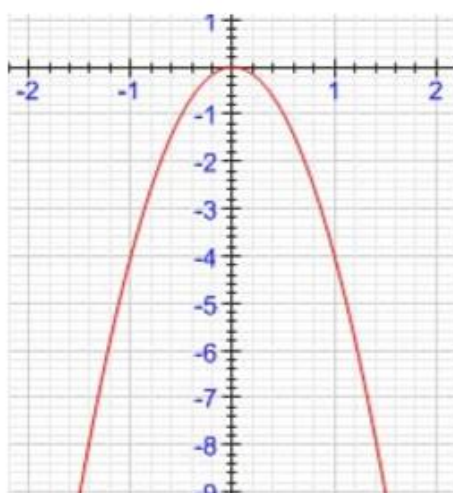
Définition : dans un Repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la

fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si $a > 0$



Si $a < 0$



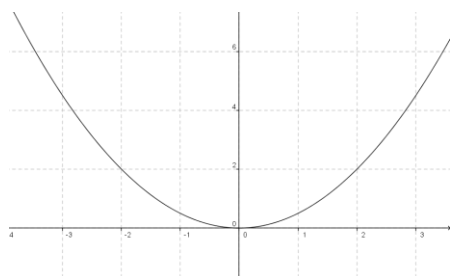
Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = \frac{1}{2} > 0$ Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

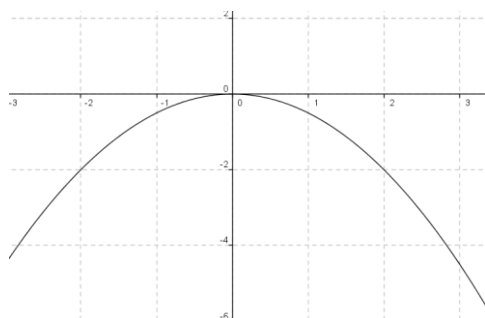


2° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

1) Formules du changement d'origine du repère

Soit $W(\alpha; \beta)$ un point dans le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ et M un point du plan

$M(x; y)$ les coordonnées de M dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$

$M(X; Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$

On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{WM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OW} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$

$\overrightarrow{WM} = \overrightarrow{WO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OW} + \overrightarrow{OM}$

Donc $X\vec{i} + Y\vec{j} = -\alpha\vec{i} - \beta\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x - \alpha)\vec{i} + (y - \beta)\vec{j}$

Donc $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$ sont des formules du changement de l'origine de repère

2) Etude et graphe de $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

Propriétés : 1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

Alors $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ c a d $f(x) - \beta = a(x - \alpha)^2$

3° On a $f(x) = y$ on pose $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$ et soit $W(\alpha; \beta)$ Alors :

Dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f est d'équation $Y = aX^2$ donc c'est une parabole de sommet W et son axe de symétrie est l'axe des ordonnées

Conséquences : 1° Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de f

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

Exemples 1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{32}{4 \times 2} = -4$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

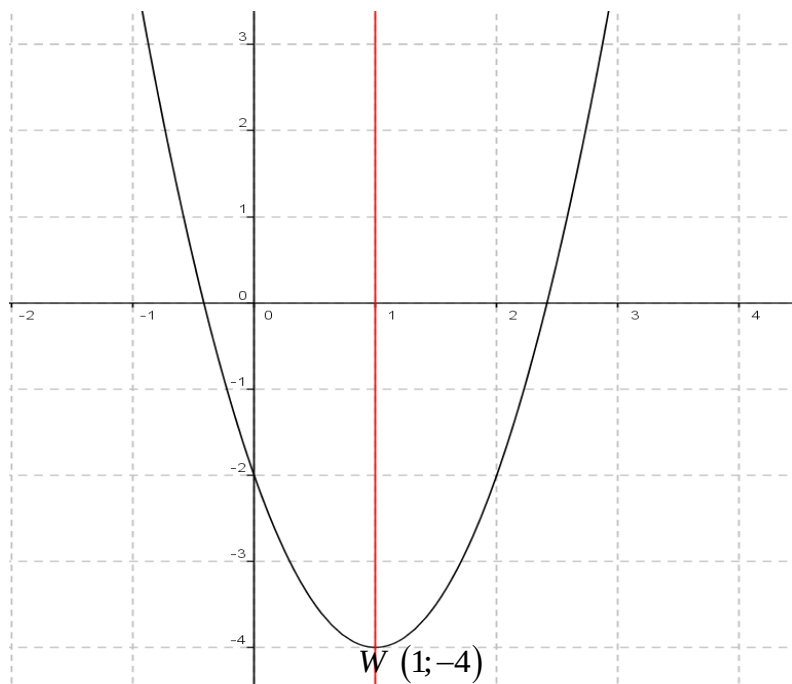
$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x - 1)^2 - 4$ ($f(1) = 2 - 4 - 2 = -4$)

Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f

On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		-4	



2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

On a $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$ et $c = 1$ ($g(x) = ax^2 + bx + c$)

$$\text{Donc } \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{-2} = 3$$

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

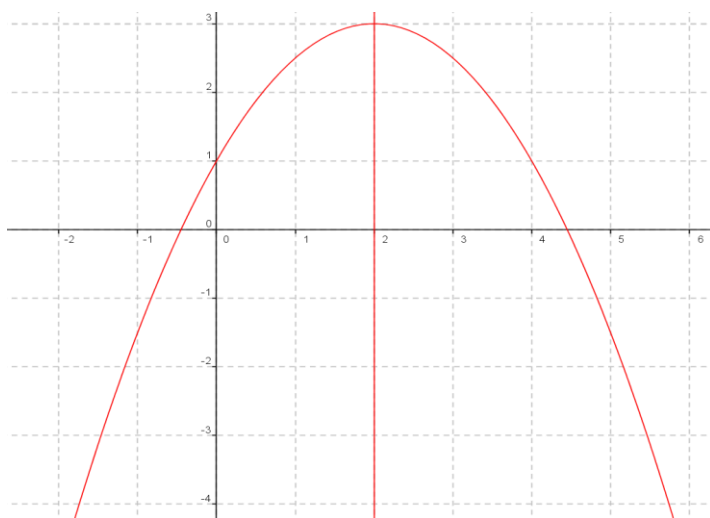
$$g(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 \left(g(2) = -\frac{1}{2}(2-2)^2 + 3 = 3 \right)$$

Soit $W(2; 3)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2; 3)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 2$

Tableau de variations de f

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		3	



VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R}^*)$

Soit f une fonction tq : $f(x) = \frac{a}{x}$

1) La parité de la fonction : On a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

2) Les variations de la fonction : soient $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{ax_2 - ax_1}{(x_1 - x_2)(x_1 x_2)} = \frac{-a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{-a}{x_1 x_2}$$

a) sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ Donc $x_1 x_2 > 0$ Donc $\frac{1}{x_1 x_2} > 0$

1^{ier} cas : si $a > 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1 x_2} < 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T(x_1; x_2) < 0$

Et alors f est strictement décroissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement décroissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

Tableau de variations de f si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

2iér cas : si $a < 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1 x_2} > 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T(x_1; x_2) > 0$

Et alors f est strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

Tableau de variations de f si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3) Représentation graphique

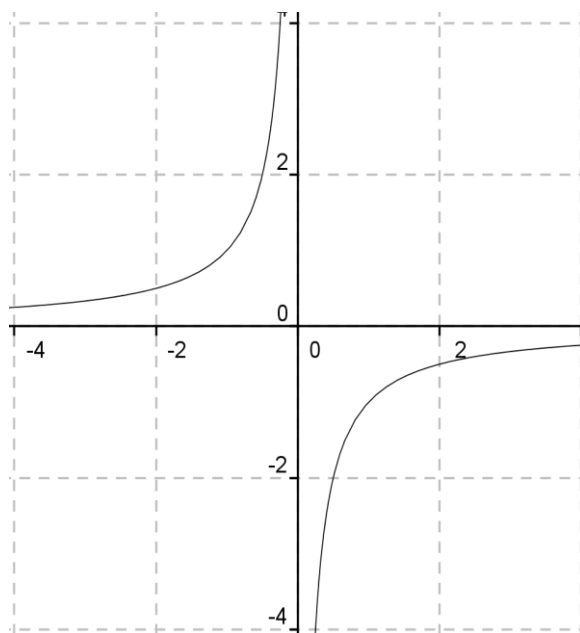
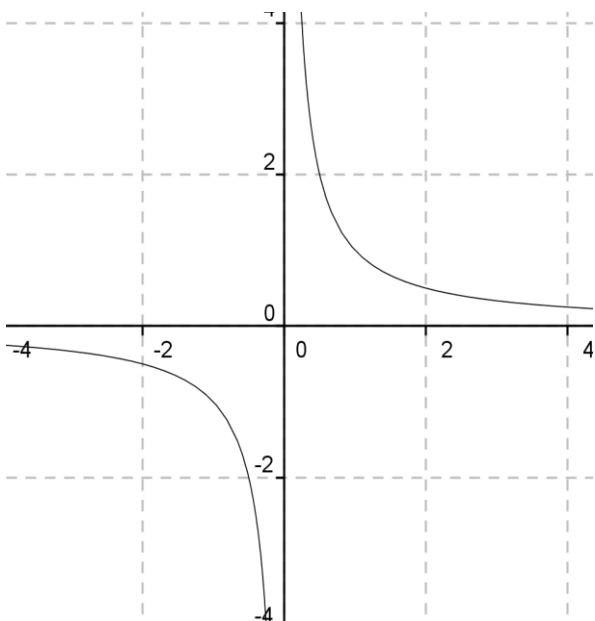
Définition : dans un Repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la

fonction $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repère et

Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

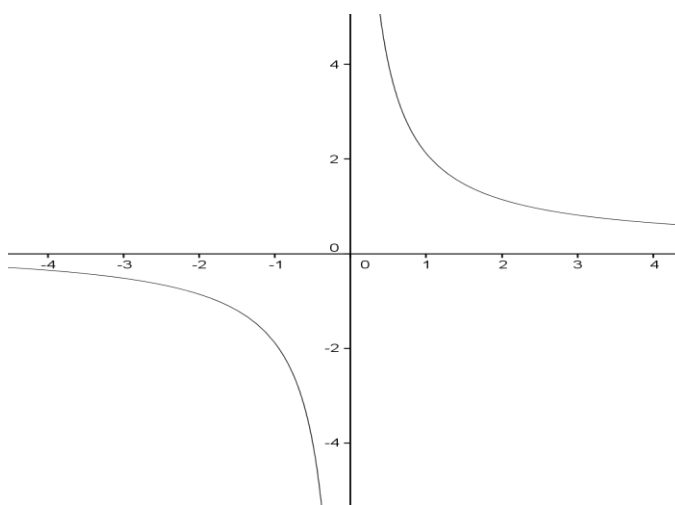
si $a > 0$

si $a < 0$



Exemples : Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{2}{x}$

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques :

$$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d} \quad a \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx+d \neq 0$ ssi $x \neq -\frac{d}{c}$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$2) \text{ Pour tout } x \in D_f : f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \frac{\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)}{x + \frac{d}{c}}$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

$$\text{On pose } \alpha = -\frac{d}{c} \text{ et } \beta = \frac{a}{c} \text{ et } \gamma = \frac{-\det f}{c^2} \text{ avec } \det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1)Résumé et propriété : Soit f une fonction homographique tq : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$a \neq 0 \text{ et } c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0$$

- Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ on a $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x - \alpha}$ dite forme réduite de $f(x)$

$$\text{Avec } \alpha = -\frac{d}{c} \text{ et } \beta = \frac{a}{c} \text{ et } \gamma = \frac{-\det f}{c^2} \text{ avec } \det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Soit $W(\alpha; \beta)$ Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y = \frac{\gamma}{X}$ avec $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées
- dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $y = \beta$

Conséquences :

1^{ier} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

2^{ier} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Exemples 1: Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $2x-4 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

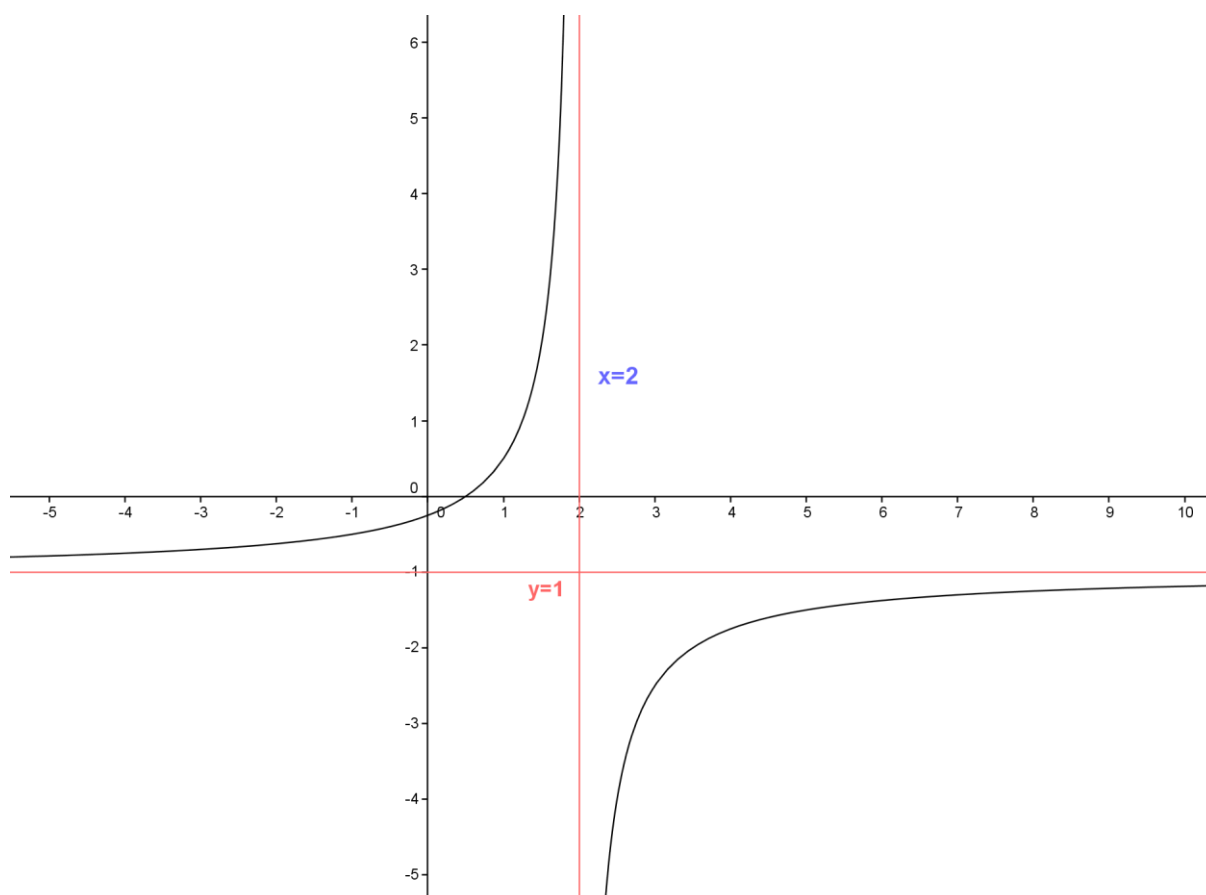
$$f(x) = \frac{-(2x-4)-3}{2x-4} = \frac{-(2x-4)}{2x-4} + \frac{-3}{2x-4} = -1 + \frac{-3/2}{x-2}$$

$$f(x) + 1 = \frac{-3/2}{x-2}$$

On pose $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ et soit $W(2; -1)$

$-2x+1$	$2x-4$
$-2x+4$	-1
-3	

- Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y = \frac{-3/2}{X}$ avec $Y = y + 1$ et $X = x - 2$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 2$ et $y = -1$
- Tableau de variations



Exemples 2: Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$f(x) - 2 = \frac{3}{x-1} \quad \text{ssi} \quad y - 2 = \frac{3}{x-1}$$

On pose $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{ssi} \quad Y = \frac{3}{X}$$

$\begin{array}{r} 2x+1 \\ -2x+2 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} x-1 \\ \hline 2 \end{array}$
--	--

- Tableau de variations de $X \longrightarrow \frac{3}{X}$ ($3 > 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

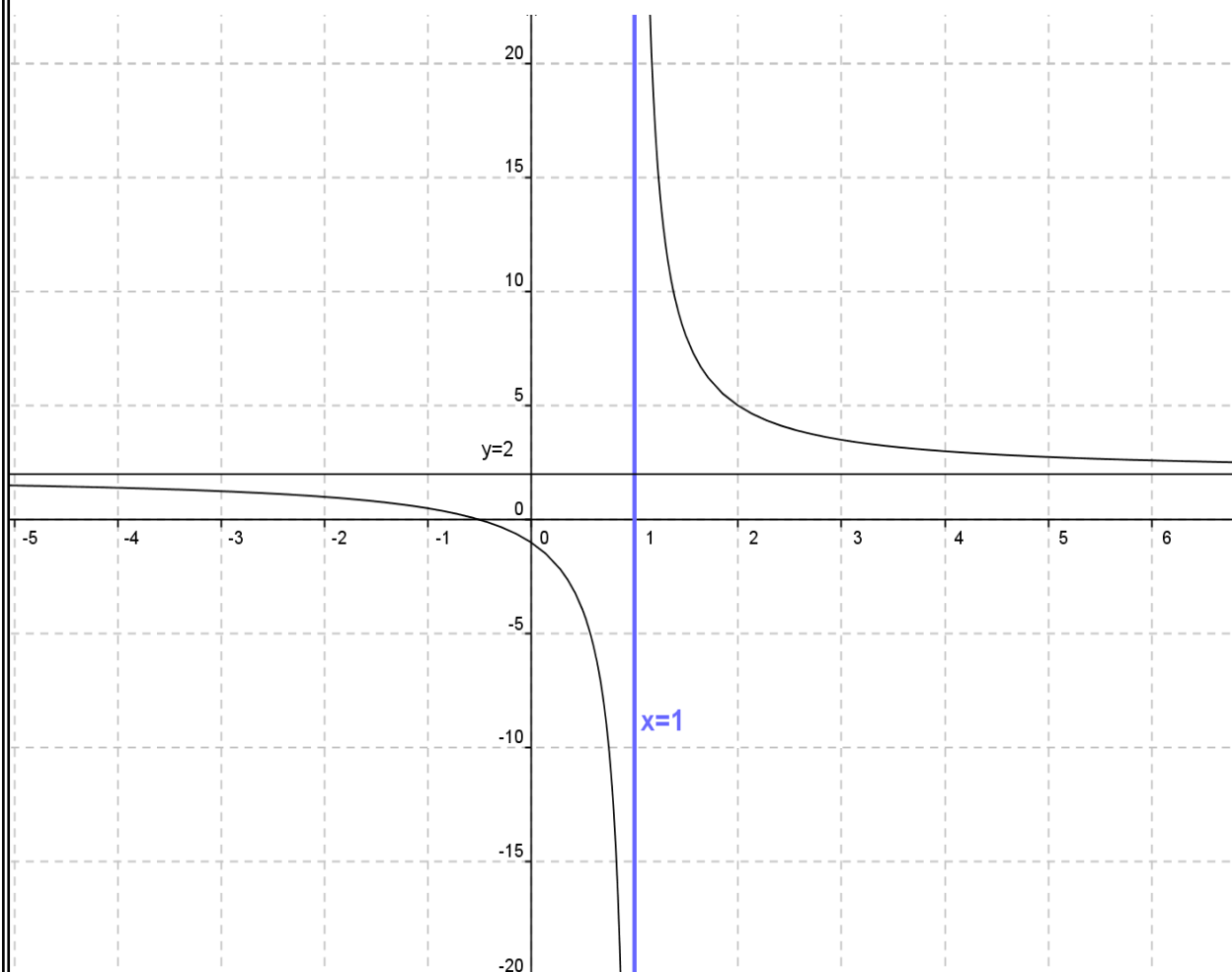
On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

- Représentation graphique

-2	1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exemples 3: Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = \frac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} = \frac{-1(x-2)-2}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = -1 + \frac{-2}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ \hline x-2 & -1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$g(x) + 1 = \frac{-2}{x-2} \text{ ssi } y + 1 = \frac{-2}{x-2}$$

On pose $\begin{cases} x-2 = X \\ y+1 = Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$

$$y = \frac{-x}{x-2} \text{ ssi } Y = \frac{-2}{X}$$

- Tableau de variations de $X \longrightarrow \frac{-2}{X} (-2 < 0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			
		$\nearrow$	$\nearrow$

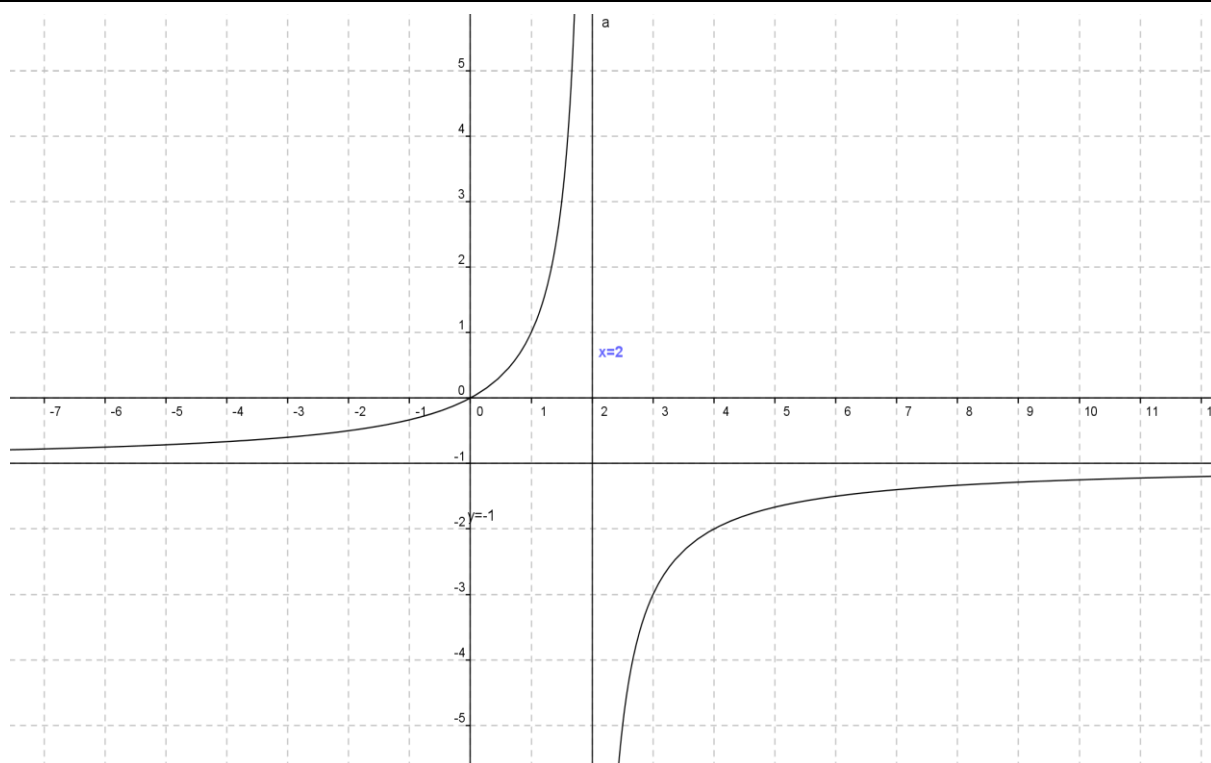
On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \frac{-x}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			
		$\nearrow$	$\nearrow$

- Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3



X) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées à la physique, la chimie, l'économie, ?

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

On peut établir les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$

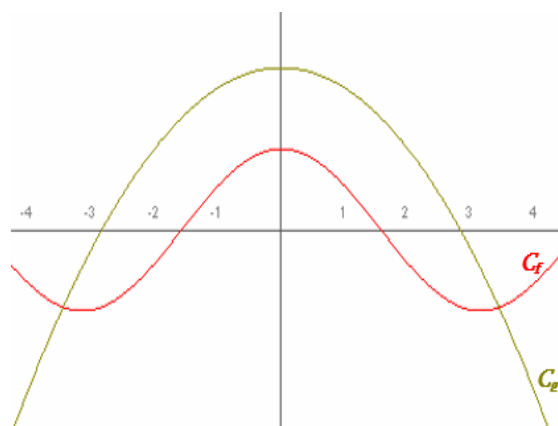
$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g) , on a $M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc

$$\text{soit } f(x) = g(x)$$

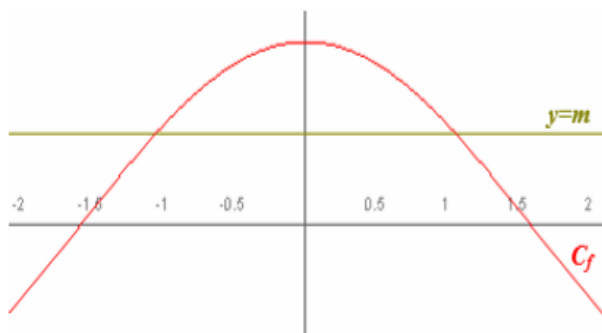
A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g) .



Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.



2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

- 1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) < 3$.
- 2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$
(On donnera un encadrement d'amplitude 5×10 des solutions non entières.)
- 3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

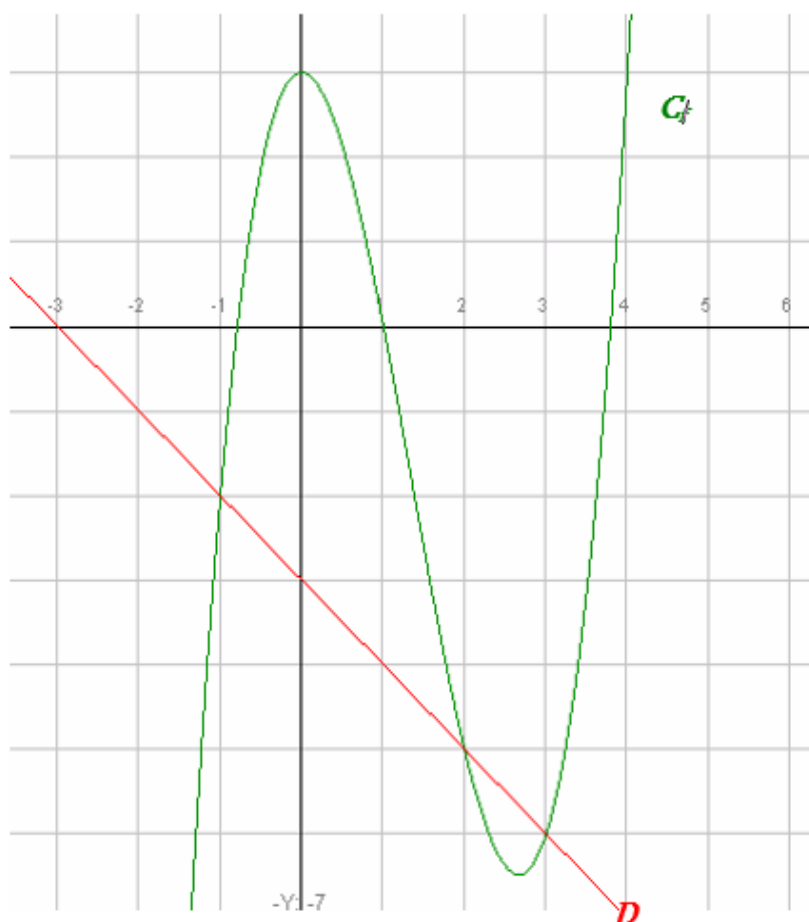
Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0; 4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{a; 1; b\}$ Avec $-1 < a < -0.5$ et $3.5 < b < 4$

$f(x) \geq 0$
 $S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de $D : y = -x - 3$ donc
 $S = \{-1; 2; 3\}$

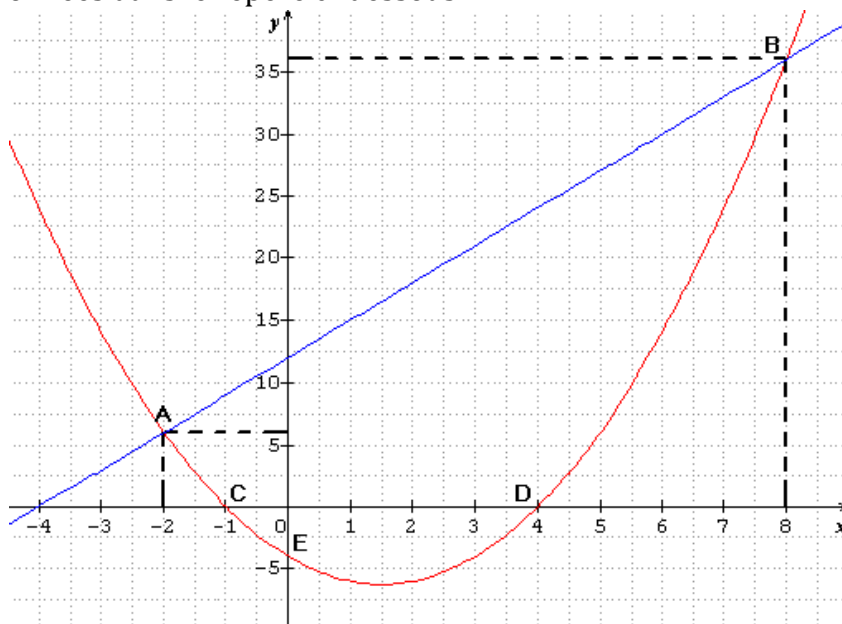
$f(x) \leq -x - 3$
 $S =]-\infty; -1] \cup [2; 3]$



Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

- 1) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
- 2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
- 4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2; 8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \text{ ssi } x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et } x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

donc $S = \{-2; 8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

$$f(x) > g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 > 3x + 12 \text{ ssi } x^2 - 6x - 16 > 0$$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$	
$x^2-6x-16$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -3 \text{ et } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1; 0)$ et $D(4; 0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{et on a } f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4; 0)$