

# Géométrie dans l'espace

## Leçon : Géométrie dans l'espace

### Présentation globale

#### I) Axiomes

#### II. Positions relatives de droites et de plans

#### III. Parallélisme

#### IV) Orthogonalité

### I. Axiomes

#### Axiomes sur lesquels reposent les raisonnements de géométrie dans l'espace

1. Par 2 points distincts de l'espace, il passe une et une seule **droite**.
2. Par 3 points non alignés de l'espace, il passe un et un seul **plan**.
3. Si un plan contient deux points A et B, alors ce plan contient tous les points de la **droite** (AB)
4. Si deux plans distincts ont un point en commun alors leur intersection est une **droite** passant par ce **point**.
5. Axiome d'Euclide : par un point A donné et une droite D donnée, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à D.

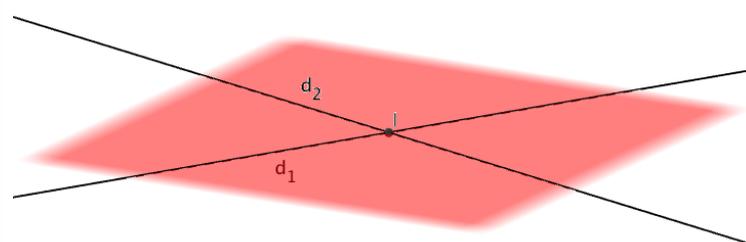
### II. Positions relatives de droites et de plans

#### 1) Positions relatives de deux droites

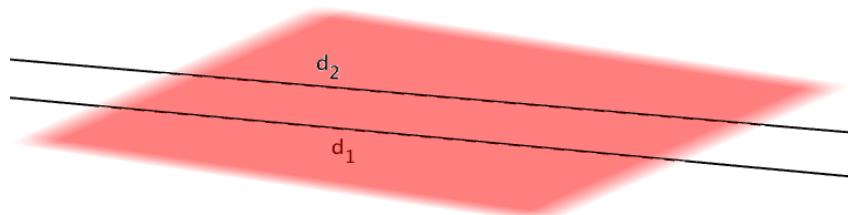
**Propriété :** Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

#### $d_1$ et $d_2$ sont coplanaires

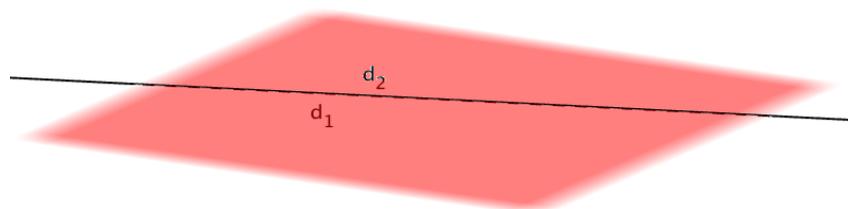
$d_1$  et  $d_2$  sont sécantes



$d_1$  et  $d_2$  sont  
parallèles

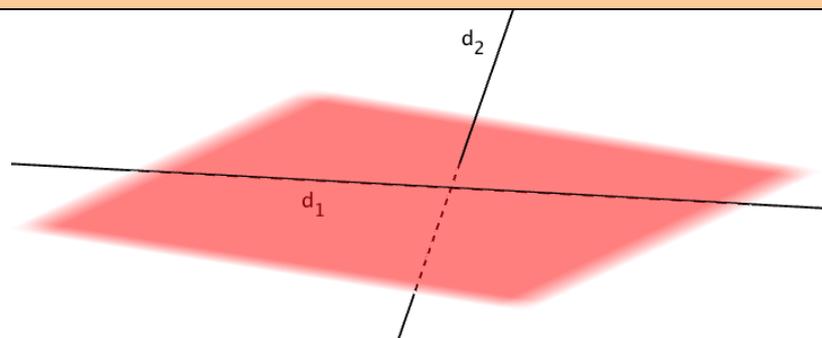


$d_1$  et  $d_2$  sont strictement parallèles



$d_1$  et  $d_2$  sont confondus

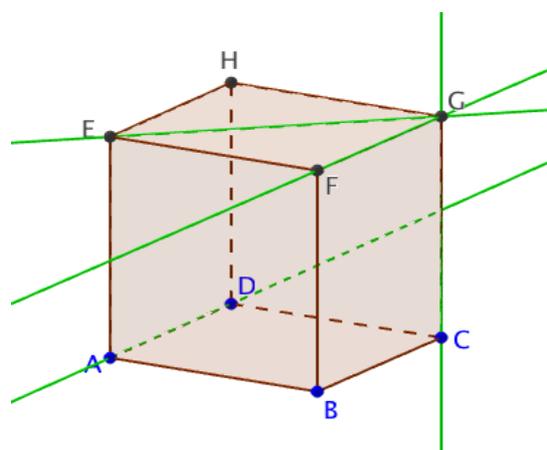
$d_1$  et  $d_2$  sont non coplanaires



Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

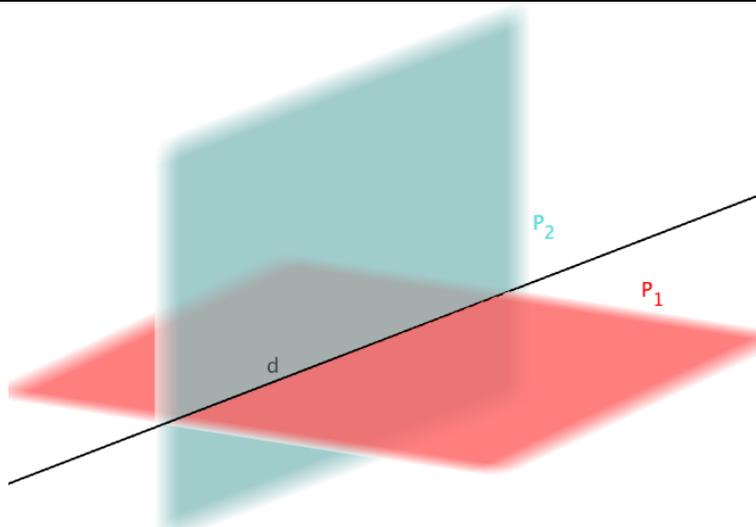
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



## 2) Positions relatives de deux plans

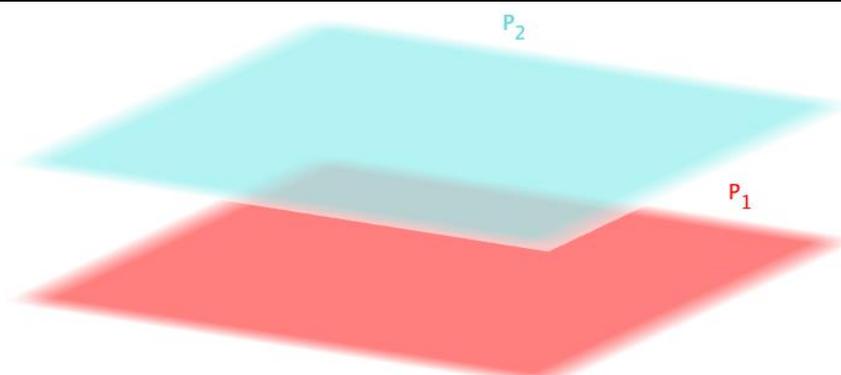
**Propriété :** Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

$P_1$  et  $P_2$  sont sécants



$P_1$  et  $P_2$  sont sécants suivant la droite  $d$

$P_1$  et  $P_2$  sont parallèles



$P_1$  et  $P_2$  sont strictement parallèles

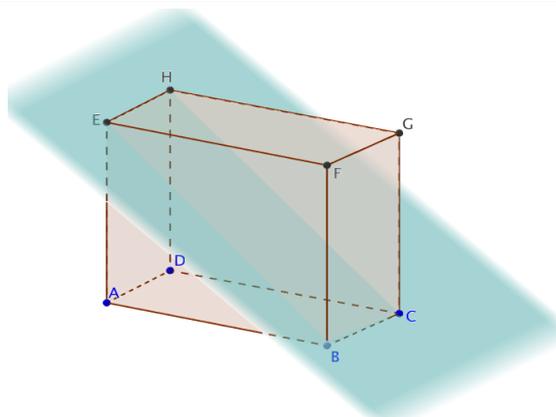


$P_1$  et  $P_2$  sont confondus

Exemple :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

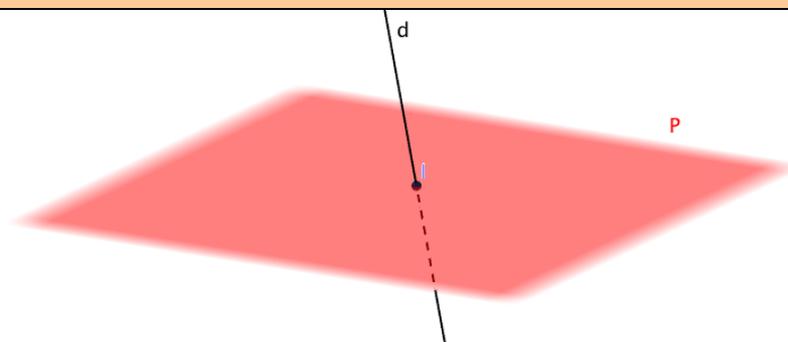
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



### 3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

**Propriété :** Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

**$d$  et  $P$  sont sécants**

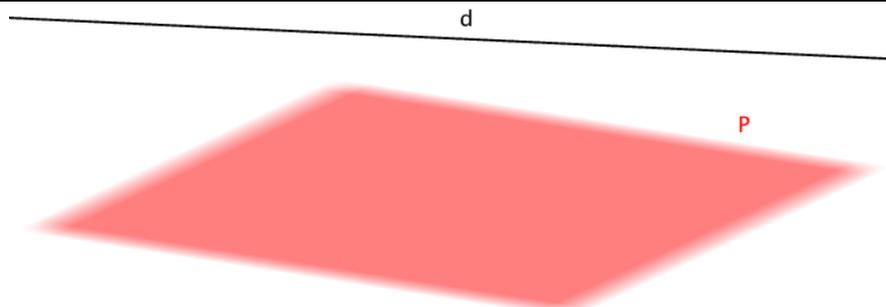


$d$  et  $P$  sont sécants en un point  $I$

**$d$  et  $P$  sont parallèles**



$d$  est incluse dans  $P$

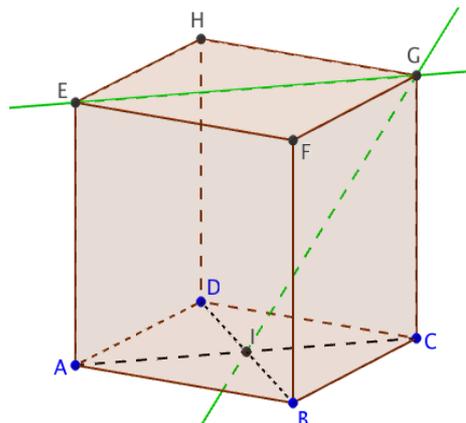


$d$  et  $P$  sont strictement parallèles

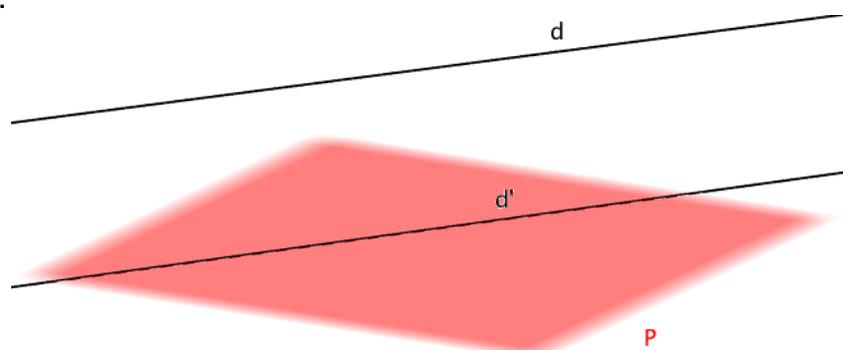
**Exemple :**

ABCDEFGH est un cube.

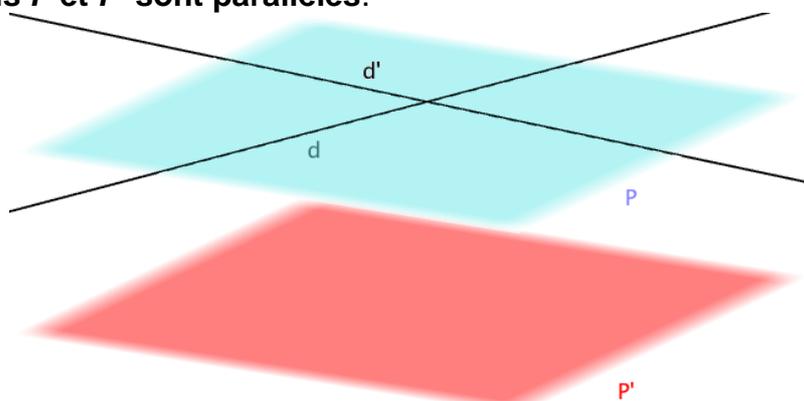
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

**III. Parallélisme****1) Parallélisme d'une droite avec un plan**

**Propriété :** Une droite  $d$  est parallèle à un plan  $P$  s'il existe une droite  $d'$  de  $P$  parallèle à  $d$ .

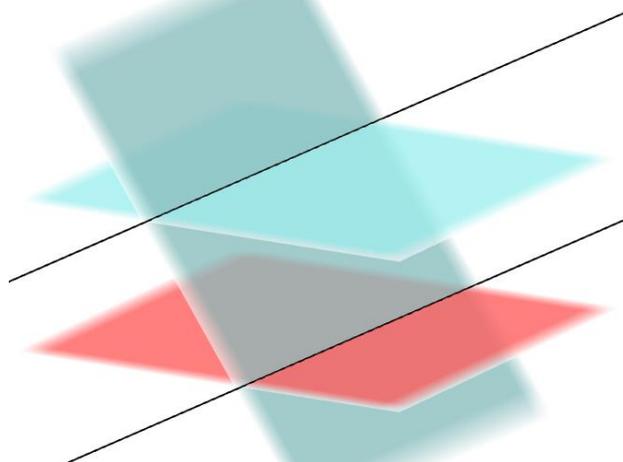
**2) Parallélisme de deux plans**

**Propriété :** Si un plan  $P$  contient deux droites sécantes  $d$  et  $d'$  parallèles à un plan  $P'$  alors les plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles.



## 2) Parallélisme de deux droites

**Propriété :** Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et **leurs intersections sont deux droites parallèles.**



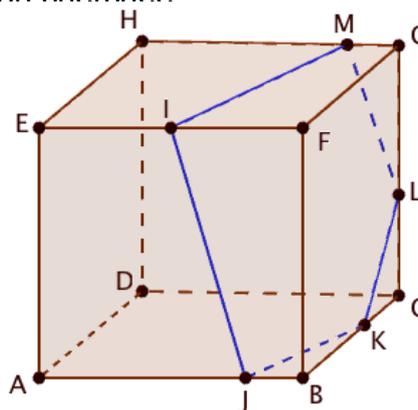
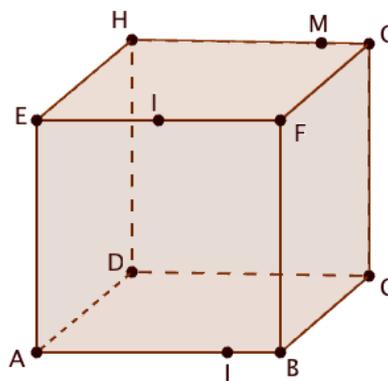
**Méthode :** Tracer l'intersection de deux plans

Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.

On construit la parallèle à (IJ) passant par M. En effet, les faces ABFE et DCGH sont parallèles donc le plan (IMJ) sécant à la face ABFE coupe la face DCGH en une droite parallèle à (IJ).

De même, on trace la parallèle à (IM) passant par J.

On obtient les points K et L et ainsi l'intersection cherchée

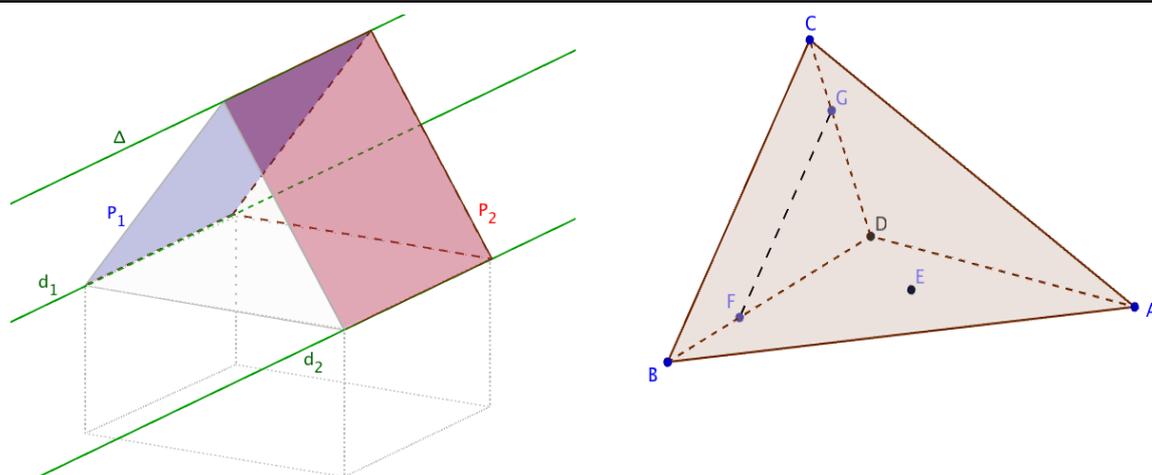


**Théorème du toit :**  $P_1$  et  $P_2$  sont deux plans sécants.

Si une droite  $d_1$  de  $P_1$  est parallèle à une droite  $d_2$  de  $P_2$  alors la droite d'intersection  $\Delta$  de  $P_1$  et  $P_2$  est parallèle à  $d_1$  et  $d_2$ .

**Méthode :** Appliquer le théorème du toit

ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC].



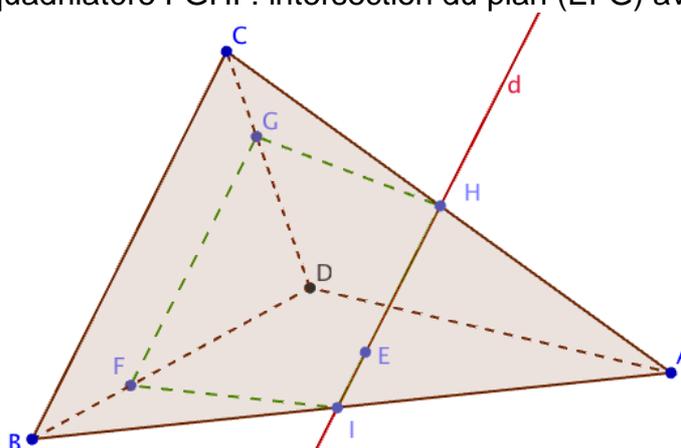
E est un point du plan (ABC).

Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).

Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite  $d$  passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.

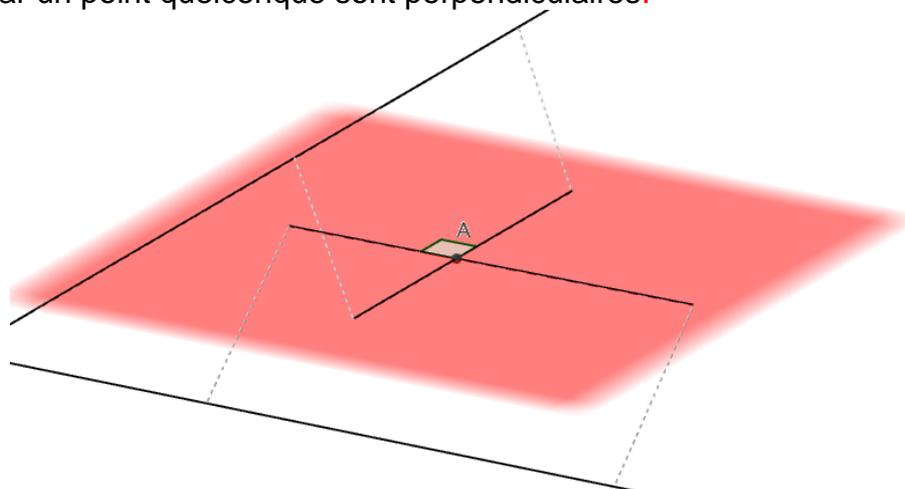
Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide.



#### IV). Orthogonalité

##### 1) Orthogonalité de deux droites

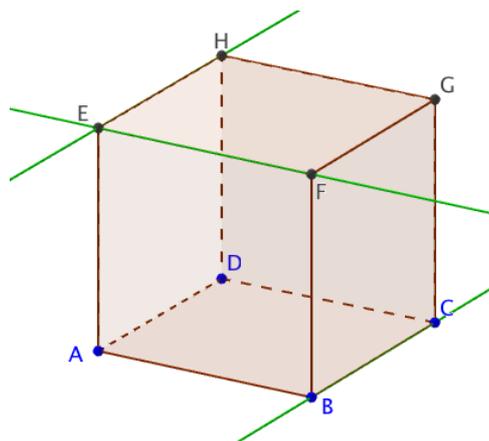
**Définition :** Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



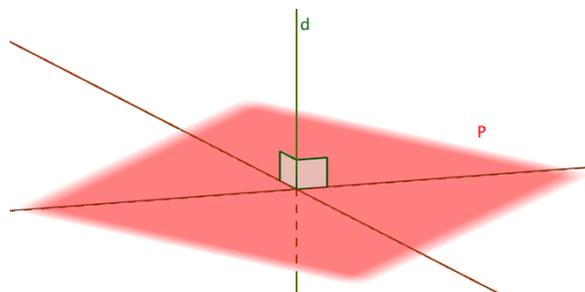
sont

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

**Propriété :** Une droite  $d$  est orthogonale à un plan  $P$  si elle est orthogonale à deux droites sécantes de  $P$ .



**Propriété :** Si une droite  $d$  est orthogonale à un plan  $P$  alors elle est orthogonale à toutes les droites de  $P$ .

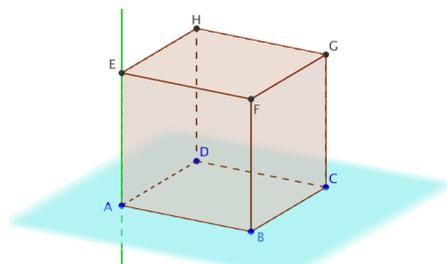
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

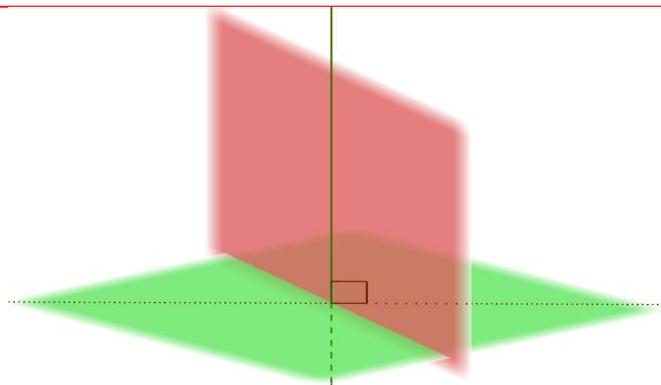
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).

(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).

Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

3) Orthogonalité de deux plans

**Propriété :** Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.



### Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.

La droite  $d$  passant par E est orthogonal au plan (ABC).

La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite  $d$ .

Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

Solution :

La droite  $d$  est orthogonal au plan (ABC).

Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite  $d$ .

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et  $d$ .

Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD).

