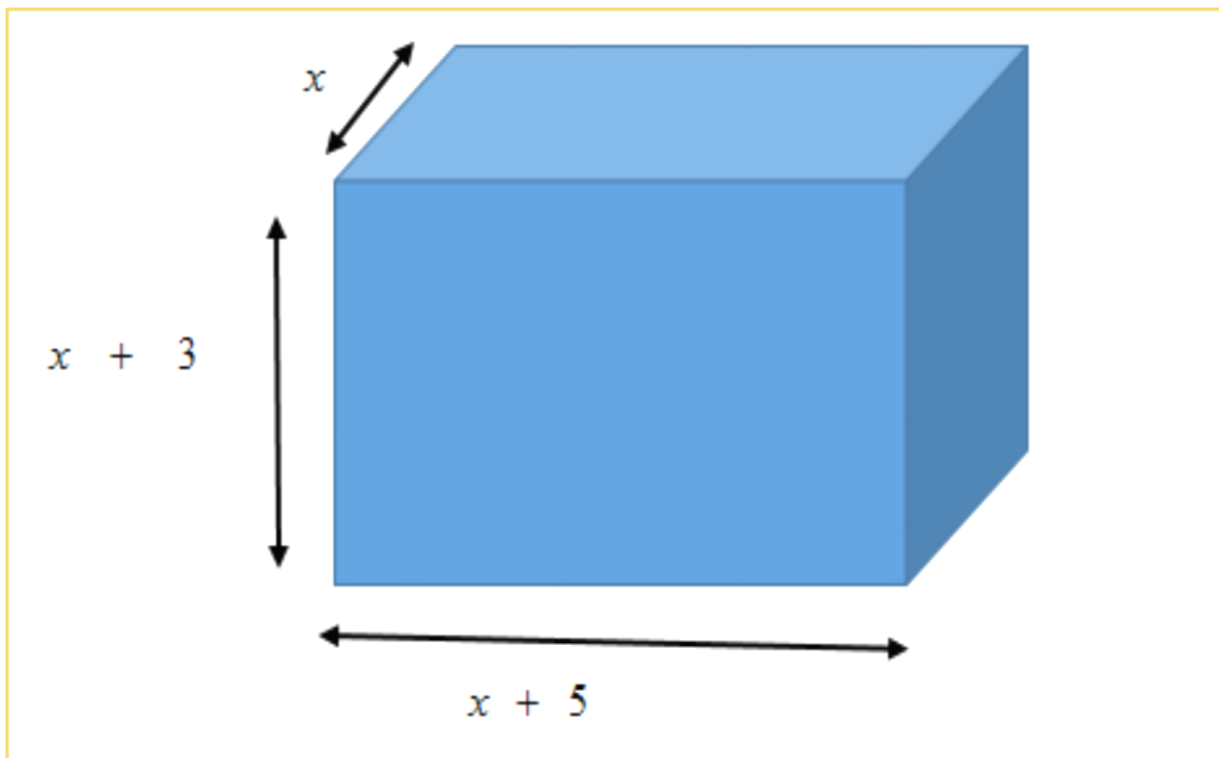


Ch. 5 : Les polynômes

I. Activité 1

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions x , $x + 3$ et $x + 5$ avec x réel strictement positif. Soit $V(x)$ le volume de ce parallélépipède

- 1) Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$
- 2) Calculer $V(1)$ et $V(2)$.
- 3) Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer $V(1)$ et $V(2)$?



II. Vocabulaire

L'exemple $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée fonction polynôme par abus de langage. On dit brièvement polynôme de degré 3 on note $d^\circ(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15, 0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

III. Définition d'un polynôme

a. Définition: On appelle polynôme de degré n , et on le nomme $P(x)$ une expression littérale en x de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
avec $a_n \neq 0$, a_n , a_{n-1} , ..., a_2 , a_1 , a_0 sont appelés coefficients du polynôme et a_0 est appelé terme constant.

b. Exemple : soit $P(x) = -5x^4 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

$P(x)$ est un polynôme de degré 4 on écrit $d^\circ(P) = 4$

Les réels $-5, 0, \sqrt{3}, 4, -7$ sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire

$$P(x) = -5x^4 + 0x^3 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$$

c. Application1

On considère les expressions littérales suivantes $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} - 1$,

$$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x + 6, \quad h(x) = \sqrt{13 - x^2} - 2x$$

1) Calculer $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$

2) Reconnaître parmi les expressions celles qui représentent un polynôme en précisant son degré et ses coefficients

d. Application2 :

Ecrire le polynôme $p(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont $-1, 0, 0, -3, 1$

Vocabulaire :

➤ un polynôme de 2eme degré écrit en général $P(x) = ax^2 + bx + c$; avec $a \neq 0$

On le nomme trinôme : ex : $P(x) = -3x^2 - 6x + 2$

➤ un polynôme de 1er degré écrit en général $P(x) = ax + b$; avec $a \neq 0$

$$\text{ex : } g(x) = -7x + 1$$

$$\text{ex : } P(x) = 0 \text{ s'appelle polynôme nul}$$

IV. Egalité de deux polynômes

Simulation : Cas du polynôme nul

$$P(x) = 0 \text{ on peut s' écrire } 0x + 0 = 0 ; 0x^2 + 0x + 0 = 0 \dots 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x \\ 0 = 0$$

a. Activité :

Soient f et g deux polynômes définies par $f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$

1) Vérifier que $f(1) = g(1)$ et $f(4) = g(4)$

La phrase « $f(x) = g(x)$, pour tout réel x » est-elle vraie ?

2) Déterminer les réels a_2, a_1, a_0 tels que pour tout réel x

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = -10x + 2x^2 + 11$$

3) Déterminer les réels a_3, a_2, a_1, a_0 tels que pour tout réel x

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = -x - 5x^3 + 2x^2 + 2$$

Soit $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

Et $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$

Sachant que pour tout réel, $P(x) = Q(x)$ que peut dire de a_n et b_n ; a_{n-1} et b_{n-1} ; ... ; a_0 et b_0

Exercice résolu:

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes définies par $P(x) = ax^3 + (b - 2)x^2 + (4 - c)x + d$ avec a, b, c et d sont des réels, et $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

Déterminons a, b, c et d sachant que $P(x) = Q(x)$ pour tout réel x

Réponse :

on a $P(x) = Q(x)$ équivaut à $a = -3, -2 = 1, 4 - c = 0, d = 7$ équivaut à $a = -3, b = 3, c = 4, d = 7$

Exercice 1 :

Considérons les polynômes $U(x)$ et $V(x)$ tels que

$$U(x) = -3 + \sqrt{32}x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 - \frac{2}{3}x^6 + a_8x^8$$

$$\text{et } V(x) = b_0 + b_1x + 4\sqrt{2}x^2 + b_4x^4 - \frac{14}{21}x^6 + b_7x^7$$

Pouvons -nous avoir $U(x) = V(x)$?

V. Opérations sur les polynômes

a. Somme et produit de deux polynômes

La somme de deux polynômes P et Q est aussi un polynôme noté $P+Q$

$$d^{\circ}(P + Q) \leq \sup(d^{\circ}(P); d^{\circ}(Q))$$

La différence de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P-Q$

$$d^{\circ}(P - Q) \leq \sup(d^{\circ}(P); d^{\circ}(Q))$$

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P \times Q$

$$d^{\circ}(P \times Q) = d^{\circ}(P) + d^{\circ}(Q)$$

b. Application:

Calculer $(P+Q)(x)$, $(P-Q)(x)$ et $(P \times Q)(x)$ avec :

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \text{ et } Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3$$

c. Remarque :

- Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls.
- Le polynôme nul n'admet pas de degré réel.

VI. Racine d'un polynôme-factorisation d'un polynôme

A. Racine d'un polynôme :

Activité3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$

1) Calculer $P(1)$

2) Déterminer les réels a et b tels que $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$

On a Dans l'activité $P(1)=0$, On dit que 1 une racine de $P(x)$ ou zéro de $P(x)$

Définition : On dit qu'un réel α est une racine ou un zéro d'un polynôme P si

$$P(\alpha) = 0$$

Application : Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

a) Vérifier que 2 et 3 sont deux racines de $P(x)$

b) Soit $R(x)$ un polynôme tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x - 2)(x + 3) + R(x)$

1) Quel est la nature de $R(x)$

2) Déterminer $R(x)$

B. Factorisation d'un polynôme.

Activité : Soit α un réel

- 1) Prouver que si un polynôme est factorisable par $x - \alpha$ alors α est une racine de ce polynôme
- 2) Soit α un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 - a. Factoriser $P(x) - Q(x)$
 - b. En déduire que si α est une racine du polynôme alors il existe un polynôme Q dont on précisera le degré tel que pour tout réel x , $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

La loi du reste

Définition: Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$.
On a donc : $r = P(a)$

Résultat: Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x - a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$

Exercices résolus : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

- 1) Montrons que $P(x)$ est divisible par $x + 3$

$$\text{Calculons } P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) - 6 = 0$$

Et comme $P(-3) = 0$ donc $P(x)$ est divisible par $x + 3$

A toi :

- 2) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x + 1$ et $x - 2$
- 3) Vérifier que $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

On dit que $P(x)$ est écrite sous forme de produit de binômes

pratiques de factorisation d'un polynôme.

1) Division euclidienne

On reprend l'exemple (exercice résolu précédent)

On a $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est divisible par $x + 3$

Cherchons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$

Le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 2$

D'où $P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2)$

On peut vérifier que $Q(2) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^3+2x^2-5x-6 & \\ -x^3-3x^2 & \\ \hline -x^2-5x-6 & \\ x^2+3x & \\ \hline -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Factorisons $Q(x)$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2-x-2 & \\ -x^2+2x & \\ \hline 0+x+2 & \\ -x-2 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

D'où la factorisation de $P(x)$ en produit de binômes $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

Exercice : soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- 1) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x - 3$
- 2) En utilise le division euclidienne déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 3)Q(x)$
- 3)
 - a. Montrer que -1 est une racine de $Q(x)$
 - b. Factoriser $Q(x)$
 - c. En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de binômes

2) Schéma de Horner

Un exemple

Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$.
On souhaite calculer $P(a)$ pour $a = 5$.

En pratique, on peut présenter le calcul précédent de $P(a)$ à l'aide du tableau suivant :

$a = 5$	2	-7	4	-1
		10	15	95
	2	3	19	94

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^3 - 7a^2 + 4a - 1 \\ &= ((2a - 7)a + 4)a - 1 \end{aligned}$$

construit selon la méthode décrite ci-dessous :

	2	-7	4	-1
$a = 5$		10	15	95
	2	3	19	94

La dernière ligne du tableau précédent ne nous livre pas seulement la valeur de $P(a)$.
En effet, si construit en utilisant les trois premiers coefficients de cette ligne, le polynôme Q de degré 2 de la manière suivante :

2	3	19	94
---	---	----	----

$$Q(x) = 2x^2 + 3x + 19$$

on remarque que :

$$Q(x)(x - a) = (2x^2 + 3x + 19)(x - 5) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 95 = (2x^3 - 7x^2 + 4x - 1) - 94 = P(x) - P(a).$$

On admet que ce résultat se généralise à un polynôme P de degré quelconque.

Dans le cas particulier où a est une racine de P (c.a.d. $P(a) = 0$), le tableau de Hörner nous donne la factorisation de $P(x)$ par $(x - a)$.