Les polynômes

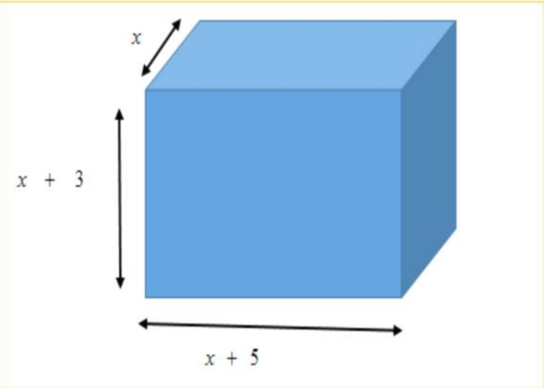
Leçon : les polynômes

Présentation globale

I) Définition d'un polynôme

Activité :

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x ,x + 3 et x + 5 avec x réel strictement positif. Soit V(x) le volume de ce parallélépipède



1)Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$

2)Calculer V(1) et (2) .

3)Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer

V(1) et V(2) ?

Vocabulaire

L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3
On note deg (V) = 3.
Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme V(x).
$8x^2$ est un monôme de la variable x, de degré 2 et de coefficient 8.
x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.
5x est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

1)Définitions et exemples

a) *monômes*

Définition : Un monôme de la variable ***x*** est une expression de la forme ax^n **ou** $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. *a* est appelé le *coefficient* et *n* est appelé le *degré* du monôme.

Exemples :

$4x^3$ est un monôme de la variable x, de degré 3 et de coefficient 4

$-\frac{1}{2}x$ est un monôme de la variable x, de degré 1 et de coefficient $-\frac{1}{2}$

-3 est un monôme de degré 0 et de coefficient -3

b) *polynômes*

Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x), Q(x)$, ... Le degré du polynôme P, noté degP, est celui de son monôme de plus haut degré.

Remarque et exemples :

1) $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ est un polynôme de degré 4 donc deg (P) = 4.

Il est ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

2) $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ donc *deg* (Q) = 3.

3) $R(x)=x^3+3x^2-\frac{2}{x}-62$ n'est pas un polynôme

4) $E(x)=\sqrt{x}+x^2-3$ n'est pas un polynôme

5) $F(x)=2=2x^0$ est un polynôme de degré 0 et s'appelle un polynôme constant

6) $M(x)=2x+6$ est un polynôme de degré 1 et s'appelle un monôme

Donc un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x)=ax+b$

7) un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

Application: Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(0)=5$ donc $a\times0^2+b\times0+c=5$ donc $c=5$

On a $P(1)=5$ donc $a\times1^2+b\times1+c=5$ donc $a+b+c=5$ donc $a+b+5=5$

donc $a+b=0$ ①

On a $P(-2)=3$ donc $a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=3$ donc $4a-2b+5=3$

donc $4a-2b=-2$ ②

donc On a le système suivant : $\begin{cases}4a-2b=-2\\a+b=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}4a-2b=-2\\b=-a\end{cases}$

donc $4a+2a=-2$ donc $6a=-2$ donc $a=-\frac{1}{3}$ donc $b=\frac{1}{3}$

Alors : $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+5$

2)Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes ***P*** et ***Q*** sont ***égaux*** et on écrit ***P = Q*** lorsqu'ils prennent la même valeur numérique en tout réel, c.-à-d. $P(x)=Q(x)$ pour tout x réel

Propriété. Deux polynômes ***P*** et ***Q*** sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et $R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution : $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (Q) = 3

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (P) =3

Donc : $P(x)=Q(x)$ car deg (P) = deg (Q) et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

Mais $P(x)\neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Application: soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et

$Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ c a d $P(x)=Q(x)$ donc On a le système suivant :

$\begin{cases}a=0\\b+c=1\\c+d=-2\\d=1\\c=-1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=0;d=1;c=-1\\c=-2-d=-2-1=-3\\b=1-c=1+3=4\end{cases}$ donc $Q(x)=x^4-2x^3+x^2-1$

II) Les polynômes et les opérations

1)Activité : soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I)Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ **et** $(P(x))^2$ dans chacun des cas suivants et comparer deg (PQ) et deg (P) +deg (Q)

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Solution : I) **1)** $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

On a : $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$

donc $P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$

On a : $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$

$\deg(P)=3$; $\deg(Q)=4$; $\deg(P+Q)=4$; $\deg(P-Q)=4$

I) 2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

On a : $P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$

On a : $P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10=5x^5-5x^2+19$

$\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$; $\deg(P+Q)=0$; $\deg(P-Q)=5$

II) 1) on a $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

$P(x)\times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$

$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2\times1+1=x^4-2x^2+1$

II) 2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$P(x)\times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$

$\deg(P\times Q)=5 \quad \deg(P)=4$; $\deg(Q)=1$

Donc $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ et $\deg(P^2)=2\deg(P)$

2)Résumé :

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$ et tel que :

$(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(P+Q)\leq \max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que :

$(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ et tel que :

$(PQ)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

III) La division par $x-a$ et factorisation de polynômes

1) La division euclidienne d'un polynôme par $x-a$

Propriétés : Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

Exemple : Soit : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$ et $a=-3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{2-2}
-x^3-3x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\ \cline{1-1}
-2x-6 & \\
2x+6 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}
$$

On a donc : $P(x)=(x+3)Q(x)+P(-3)=(x+3)(x^2-2)+0=(x+3)(x^2-2)$

$Q(x)=x^2-2$ est le quotient et $P(-3)=0$ le reste

Remarques : 1)Le schéma de la division euclidienne des polynômes ressemble beaucoup à celui de la division euclidienne des entiers

2) Remplaçons x par **-3** dans le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)-6=-27+27+6-6=0$

On dit que **-3** est racine du polynôme $P(x)$

3)Le reste de la division de $P(x)$ par $x+3$ est 0. on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$.

2)Racine d'un polynôme :

Définition : Soient P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$

On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a)=0$

Exemples : Soit : $P(x)=x^3-2x^2+1$

1) $P(1)=1^3-2\times1^2+1=1-2+1=0$ donc 1 est racine du polynôme P

2) $P(2)=2^3-2\times2^2+1=8-8+1=1\neq0$ donc 1 n'est pas une racine du polynôme P

Propriété : Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$

a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x-a$.

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$

Exemple : Soit : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$ donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

On trouve : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$ ①

On pose : $Q(x)=x^2-2x-8$ on a : $Q(-2)=(-2)^2-2(-2)-8=4+4-8=0$

Donc **-2** est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

On trouve : $Q(x)=(x+2)(x-4)$ ②

D'après ① et ② on a **:** $P(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$

$P(x)=0$ ssi $(x-1)(x+2)(x-4)=0$ ssi $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$

$P(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

Pour réduire le nombre de multiplications lors de l'évaluation d'un polynôme, le mathématicien anglais William George Horner (1786 - 1837) a inventé un algorithme pratique.