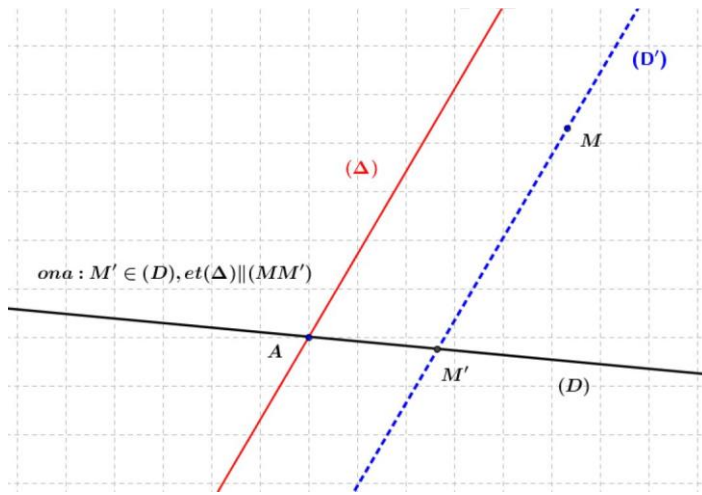


La projection dans le plan

- I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite
 II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite



1) Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A, et soit M un point du plan

La droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'

le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur

(D) parallèlement à (Δ) ou l'**Image d'un point M** la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et

on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

la droite (Δ) s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$: M' l'**Image d'un point M** la projection P

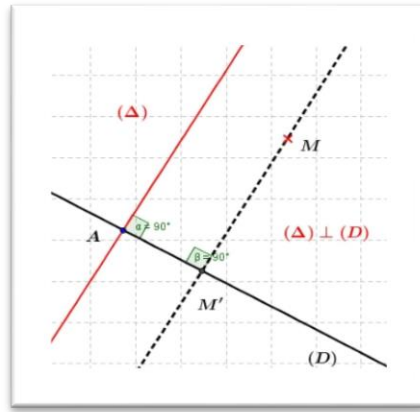
si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$ on dit alors que le point B est **invariant** par la projection P

2. Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

Cas particulier

Si les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires (on dit aussi orthogonales) on dit que M' est la projection orthogonale de M sur (D)



Application 1 :

Soit ABC est un triangle et M le milieu de $[AB]$

1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$, $P_1(M)$, $P_1(B)$, $P_1(C)$,

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(M)$, $P_2(B)$, $P_2(C)$,

Réponse : 1) soit: P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

On a $A \in (AC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_1(A) = C$

On a $B \in (BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B) = B$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C) = C$

Soit $M' = P_1(M)$ on a M le milieu de $[AB]$

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de $[BC]$
donc M' est le milieu de $[BC]$

1) soit: P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc $P_2(A) = A$

On a $C \in (AC)$ donc C est invariante par la projection P_2 donc $P_2(C) = C$

On a $B \in (BC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_2(B) = C$

On a M le milieu de $[AB]$ donc la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en son milieu
soit: M'' ce milieu donc $P_2(M) = M''$

3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite

Soi A et B deux points du plan et A' et B' sont respectivement leur projection P sur (D) parallèlement à (Δ)

Propriété 1 : L'image du segment $[AB]$ par la projection P est le segment $[A'B']$ et on écrit :

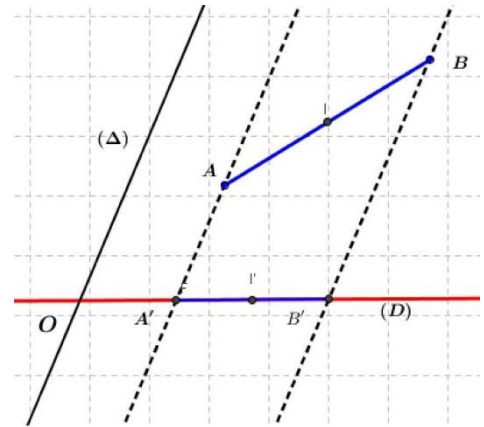
$$P([AB]) = [A'B']$$

Propriété 2 : Si I est le milieu de $[AB]$ alors $P(I) = I'$ est le milieu du segment $[A'B']$

On dit que la projection conserve les milieux

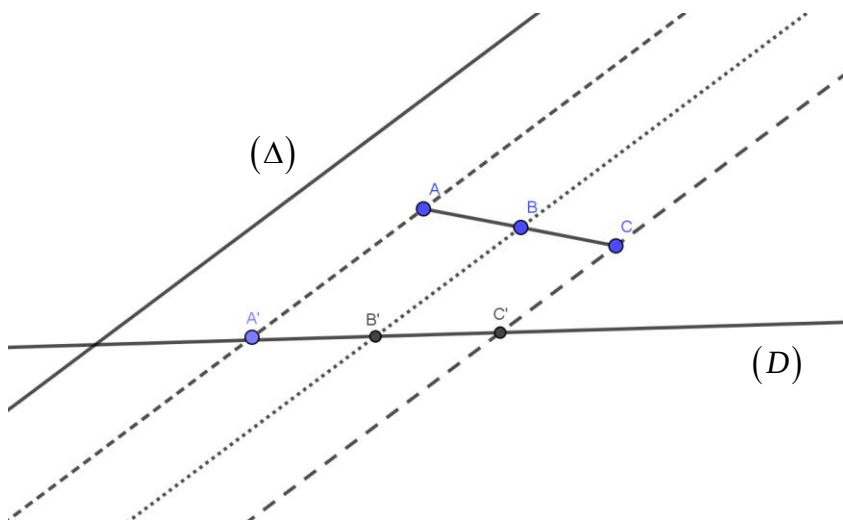
Remarque :

on a : $P([AB]) = [A'B']$ donc pour tout point M du segment $[AB]$: $P(M) = M' \in [A'B']$



II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

1) Théorème de Thales :



Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point, et soient $A ; B ; C$ trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles

soient $A' ; B' ; C'$ respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ sur (D) parallèlement à (Δ)

$$\text{Alors : } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

2) Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient $A' ; B' ; C'$ respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ sur droite (D) parallèlement à (Δ)

Si $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Application 1 :

Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

1) Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

Réponse : 1) soit: P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A) = A$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P donc $P(C) = C$

On a aussi : $P(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Alors : $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

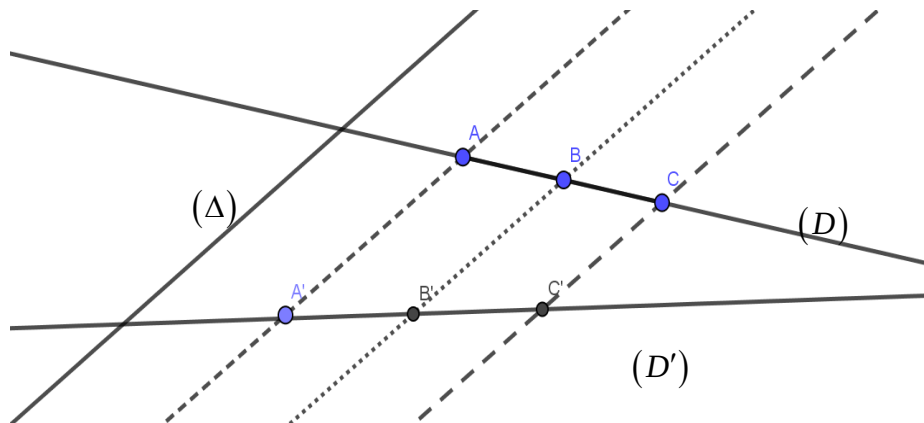
3) le théorème réciproque de Thales

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à une troisième (Δ) , et soient $A ; B$ deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points $A ; B$ sur (D') parallèlement à (Δ)

Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points $A ; B$ et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points $A' ; B'$ et C' sur la droite (D')

Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$



Propriété

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes et $A ; B ; C ; D$ des points distinctes et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ET si $A' ; B' ; C'$ et D' respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ et D sur la droite (Δ') parallèlement à (Δ) Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Application(réciproque de Thales):

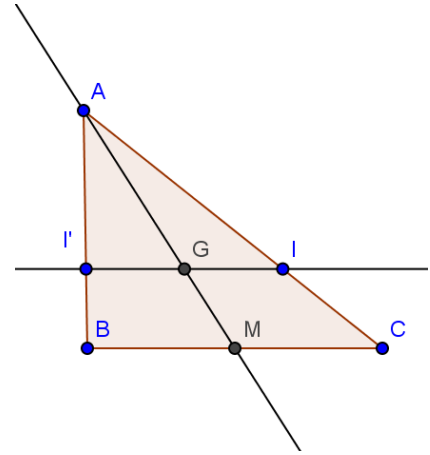
Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de $[BC]$; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

$$\text{Montrer que } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$$



Réponse : 1) On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ donc $\|\overrightarrow{AI}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right\|$ donc $AI = \frac{2}{3} AC$ donc $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ donc $\|\overrightarrow{AI'}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \right\|$ donc $AI' = \frac{2}{3} AB$ donc $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$ et d'après la réciproque de Thales : $(II') \parallel (BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu de $[BC]$ Mq : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A) = A$ ①

la parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle coupe (AM) en M donc $P(C) = M$ ②

la parallèle à (BC) passant par I est (II') elle coupe (AM) en G donc $P(I) = G$ ③

Et on a en plus $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ ④ donc D'après ① et ② et ③ et ④ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$ car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points