

Rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe

I- Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

1-Exemple :

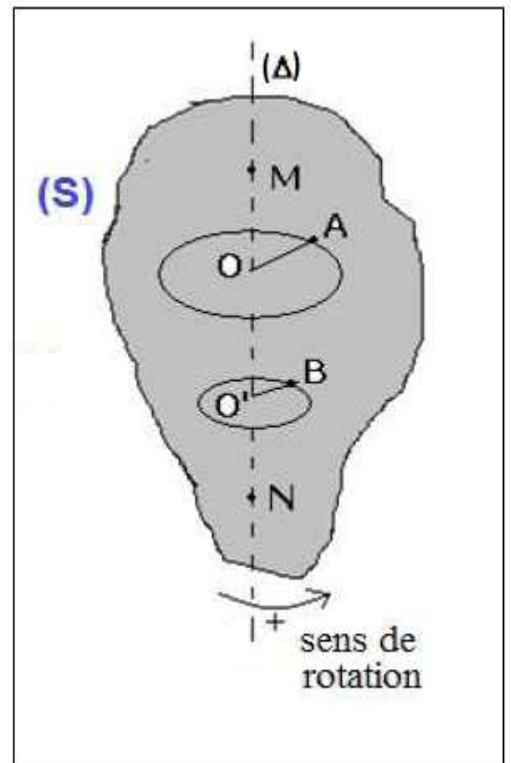
On considère un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ).

- Les deux point A et B décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ).
- Les deux point M et N situés sur l'axe (Δ) sont immobiles.

2- Définition :

Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si :

Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.



II- Repérage d'un point du solide :

Soit M un point quelconque choisi sur la trajectoire circulaire. On oriente la trajectoire dans un sens arbitraire. La position du point M est repéré par :

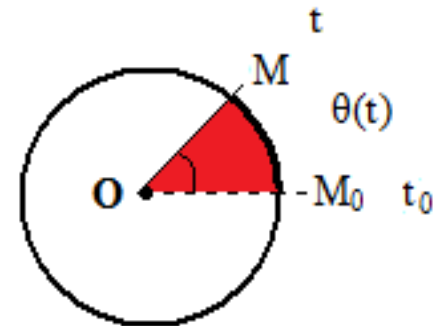
1- Abscisse angulaire :

On appelle abscisse angulaire du point M à un instant t la valeur algébrique de l'angle :

$$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$$

L'unité de mesure de l'abscisse angulaire est le radian (rad).

abscisse angulaire (rad) $\rightarrow \theta = 2\pi \times n \leftarrow$ nombre de tours



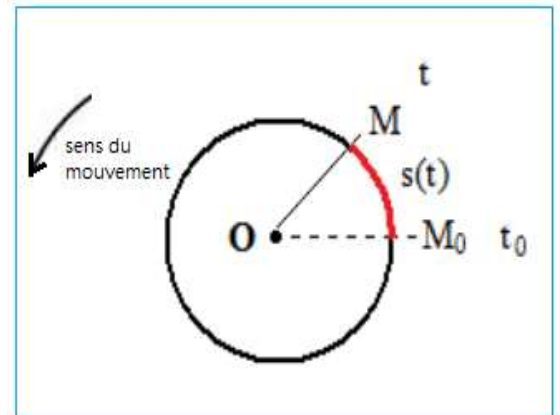
2- abscisse curviligne :

On appelle abscisse curviligne du point mobile M à un instant t la valeur algébrique de l'arc :

$$s = \widehat{M_0M}$$

L'unité de mesure de l'abscisse curviligne est le mètre (m).

S est une grandeur algébrique sa signe dépend de l'orientation de la trajectoire.



3- La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

L'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire sont proportionnelles :

abscisse curviligne (m) $\rightarrow s(t) = R \cdot \theta(t) \leftarrow$ abscisse angulaire (rad)

↑
rayon (m)

III- Vitesse d'un solide en rotation :

1- Vitesse angulaire

1.1- Vitesse angulaire moyenne

Lorsqu'un corps est en mouvement autour d'un axe fixe (Δ). Le point M occupe la position M_1 à l'instant t_1 et la position M_2 à l'instant t_2 , les deux positions étant repérées par des abscisses angulaires θ_1 et θ_2 .

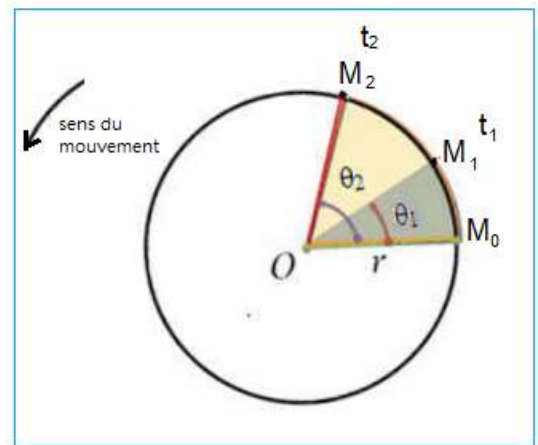
Définition :

La vitesse angulaire moyenne ω_m du point M entre t_1 et t_2 est donnée par la relation suivante :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$\Delta\theta$ est l'angle de rotation du solide pendant la durée Δt .

Unité de la vitesse angulaire dans (S I) est le radian par seconde, noté rad/s .

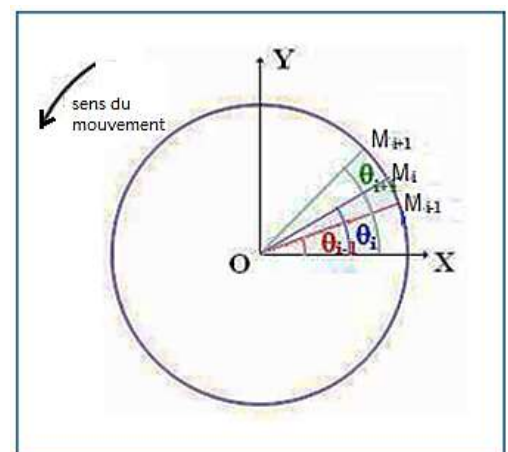


2- La vitesse angulaire instantanée :

En considérant t_{i-1} et t_{i+1} deux instants très proches et qui encadrent l'instant t_i .

La vitesse angulaire instantanée à l'instant t_i est la vitesse angulaire moyenne entre les instants t_{i+1} et t_{i-1} .

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$



3- Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire :

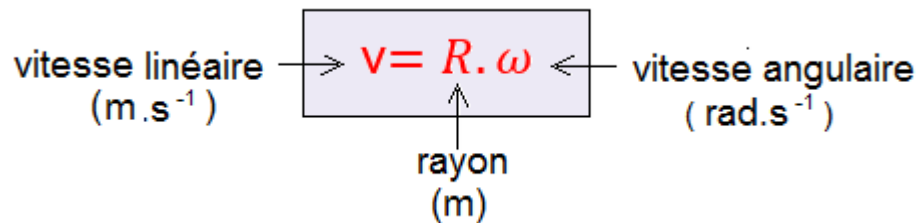
Vitesse linéaire d'un point du solide

Pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$; le point M parcourt la distance $\widehat{M_1M_2}$ la vitesse linéaire s'écrit :

$$v = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

On sait que : $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$

Donc : $v = R \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$



Remarque :

Tous les points du solide ont à chaque instant la même vitesse de rotation, mais ils n'ont pas généralement la même vitesse instantanée.

IV- Mouvement de rotation uniforme

1- Définition :

Le mouvement de rotation d'un solide est dite uniforme si sa vitesse angulaire ω reste constante au cours du temps.

2- Les propriétés de rotation uniforme

2.1- La période :

La période T d'un mouvement de rotation uniforme est la durée d'un tour.

On : $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$ pour un tour $2\pi = \omega \cdot T$

$$\text{période (s)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \leftarrow \text{vitesse angulaire (rad.s}^{-1}\text{)}$$

avec T en seconde (s) et ω en radian par seconde (rad/s).

2.2- la fréquence :

La fréquence f d'un mouvement de rotation uniforme est le nombre de tours par seconde.

$$\text{fréquence (Hz)} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \leftarrow \text{vitesse angulaire (rad.s}^{-1}\text{)}$$

Remarque :

La vitesse angulaire ω peut être exprimée en $tr.s^{-1}$ ou $tr.min^{-1}$

avec :

$$\begin{cases} 1tr.min^{-1} = \frac{2\pi}{60}rad.s^{-1} \\ tr.s^{-1} = 2\pi.s^{-1} \end{cases}$$

V- Equation horaire d'un mouvement de rotation uniforme

θ et θ_0 sont des abscisse angulaires, d'un point M du solide, successivement aux instants t et t_0 .

On écrit :

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\theta = \omega \cdot (t - t_0) + \theta_0$$

Si $t_0 = 0$ on a : $\theta = \omega \cdot t + \theta_0$

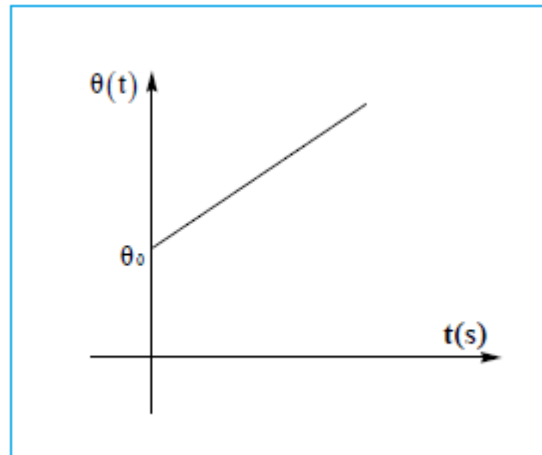
Activité : (voir fin du cour)

L'équation horaire d'un mouvement de rotation uniforme en abscisse angulaire :

abscisse angulaire à l'instant t (rad) \rightarrow $\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$

abscisse angulaire à $t=0$ (rad)

vitesse angulaire (rad.s⁻¹)



L'équation horaire d'un mouvement de rotation uniforme en abscisse curviligne $s(t)$:

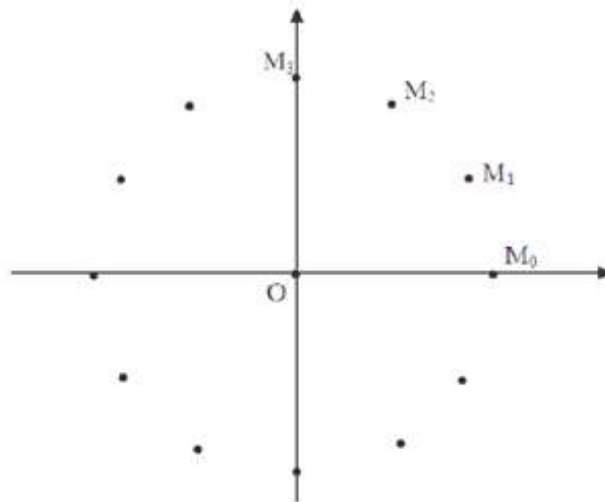
abscisse curviligne à l'instant t (m) \rightarrow $s(t) = v \cdot t + s_0$

abscisse curviligne à $t=0$ (m)

vitesse linéaire (m.s⁻¹)

Activité :

La figure suivante représente l'enregistrement de mouvement d'un point M située au centre d'un autoporteur en rotation autour d'un axe fixe. (L'autoporteur est lié par un fil à un axe métallique fixé sur une table horizontale). L'intervalle de temps entre deux enregistrements consécutifs est égal à 40 ms.



On considère l'axe Ox passant par M_0 comme direction référentielle. Les position du point M sont déterminées par l'abscisse angulaire $\theta_i = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_i})$ ou bien par l'abscisse curviligne $S = (\widehat{M_0M_i})$. Le moment d'enregistrement de point M_2 correspond à l'origine des temps.

- 1) Montrer que le mouvement de M est circulaire uniforme.
- 2) Compléter le tableau suivant :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}
Θ (rad)	0											
S (m)	0											
t(s)			0									

- 3) En utilisant une échelle convenable, tracer les deux courbes $\theta=f(t)$ et $s=f(t)$.
- 4) En déduire les équations horaires du mouvement de point M.
- 5) Déterminer la vitesse angulaire de rotation de l'autoporteur et la vitesse de translation du point M graphiquement et par le calcul.
- 6) Vérifier la relation $v = r.\omega$, tel que v est la vitesse de translation, ω la vitesse angulaire et r le rayon de la trajectoire.

Exploitation:

1- Montrons que le mouvement est circulaire et uniforme :

La trajectoire du point M est circulaire, la distance entre deux points consécutifs reste constante donc le mouvement est circulaire uniforme.

2- Complétons le tableau :

On prend comme exemple l'abscisse curviligne en position M_2 :

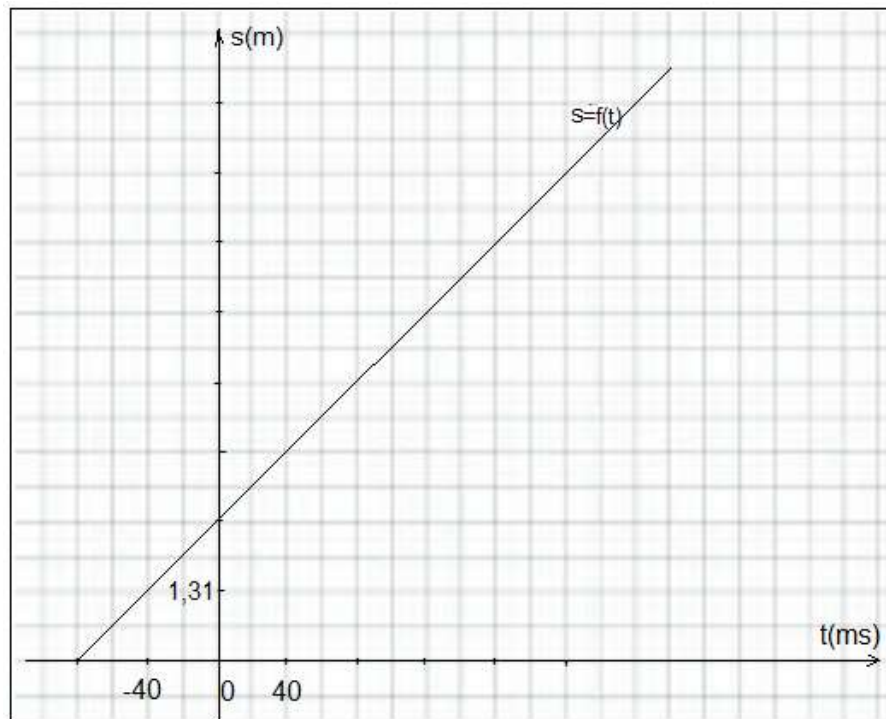
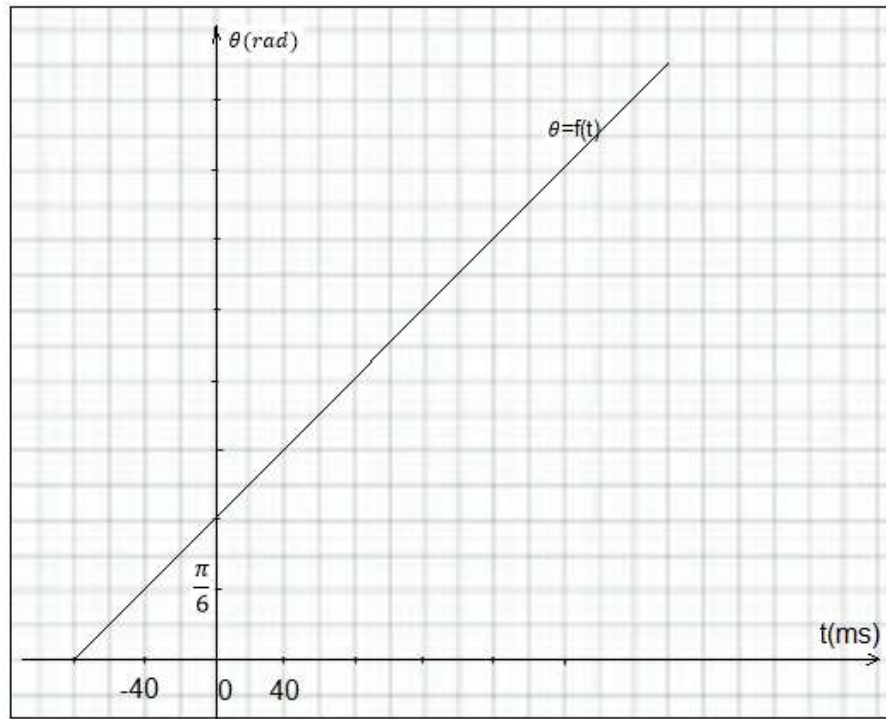
$$s_2 = \widehat{M_0 M_2} = r(\theta_2 - \theta_0)$$

r rayon de la trajectoire

$$s_3 = 2,5 \times \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = 1,62 \text{ cm}$$

Position	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}
$t(ms)$	-80	-40	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360
$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$s(cm)$	0	1,31	2,62	3,93	5,24	6,54	7,85	9,16	10,47	11,78	13,09	14,40

3- Les courbes $\theta = f(t)$ et $s = f(t)$



4- Les équations horaires du mouvement :

La courbe $\theta = f(t)$ est une fonction affine son équation s'écrit :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

A $t=0$ on a :

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ \theta(t=0) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

ω représente le coefficient directeur :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_6 - \theta_3}{t_6 - t_3} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{(160 - 40) \times 10^{-3}} = 13,09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'équation horaire s'écrit : $\theta = 13,09 t + \frac{\pi}{3}$

De la même façon on obtient l'équation horaire : $s = v \cdot t + s_0$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_6 - s_3}{t_6 - t_3} = \frac{(7,85 - 3,93) \times 10^{-2}}{(160 - 40) \times 10^3} = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

$$s_0 = R\theta_0 = 2,5 \times 10^{-2} \times \frac{\pi}{3} = 2,62 \cdot 10^{-2} m$$

$$s = 0,33 t + 2,62 \cdot 10^{-2}$$

5- graphiquement :

la vitesse angulaire est le coefficient directeur du graphe = $f(t)$, donc :

$$\omega = 13,10 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

la vitesse linéaire est le coefficient directeur du graphe = $f(t)$, donc :

$$v = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

-Par calcul :

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{([0 - (-80)] \times 10^3)} = 13,09 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_0}{t_2 - t_0} = \frac{(2,62 - 0) \times 10^{-2}}{[0 - (-80)] \times 10^3} = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

6- Vérification de la relation $v = R \cdot \omega$:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{donc : } v = R \cdot \omega$$

$$R \cdot \omega = 2,5 \times 10^{-2} \times 13,09 = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

Donc la relation $v = R \cdot \omega$ est vérifiée.