

Travail et énergie cinétique

I- Energie cinétique d'un solide en translation :

1- Notion de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique d'un solide est l'énergie qu'il possède du fait de son mouvement.

L'énergie cinétique se note E_C ; c'est un nombre toujours positif qui s'exprime en Joule (J) dans le S.I.

2- Energie cinétique d'un solide en translation :

L'énergie cinétique E_C d'un solide en translation est donnée par la formule :

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot V^2 \quad \begin{cases} E_C : \text{énergie cinétique du solide en joules (J)} \\ m : \text{masse du solide en kg} \\ v : \text{Vitesse du solide en m.s}^{-1} \end{cases}$$

Remarque :

Comme la valeur de la vitesse, l'énergie cinétique dépend du référentiel choisi.

3- Energie cinétique d'un solide en rotation :

Soit un solide indéformable de masse M en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) de vitesse angulaire ω .

Chaque point de solide A_i a une masse m_i est une vitesse linéaire v_i donc il possède une énergie cinétique $E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$.

On sait que $v_i = r_i \cdot \omega$ avec r_i est le rayon de la trajectoire circulaire du point A_i .

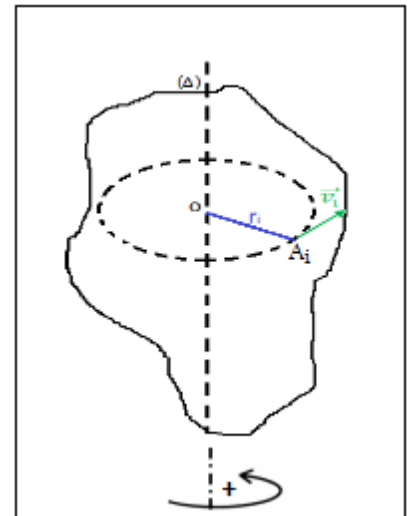
Donc :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$

L'énergie cinétique totale du solide :

$$E_C = \sum_{i=1}^n E_{Ci} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

On pose : $J_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$ d'où : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2$



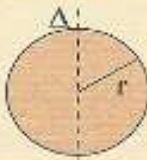
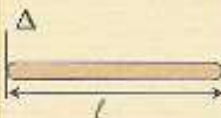


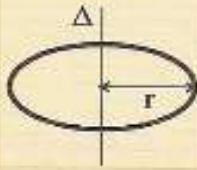
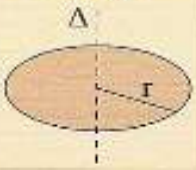
J_{Δ} : s'appelle le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation (Δ) . Il dépend de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

Définition :

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe de moment d'inertie J_{Δ} et de vitesse angulaire ω est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2 \quad \begin{cases} E_C : \text{énergie cinétique du solide en (J)} \\ J_{\Delta} : \text{moment d'inertie du solide en (kg.m}^2\text{)} \\ \omega : \text{Vitesse angulaire du solide en rad.s}^{-1} \end{cases}$$

- Les expressions des moments d'inertie de quelques solides homogènes :

Corps	Sphère	Tige	Tige	Cylindre	Anneau	Disque
						
Moment d'inertie	$J_{\Delta} = \frac{2}{5} m \cdot r^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{3} m l^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m l^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$	$J_{\Delta} = m \cdot r^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$

Application 1 :

On considère un disque homogène de masse $m = 800g$ et de rayon $r = 30cm$ tourne à la fréquence de $\frac{100}{3} tr/min$.

son centre d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ) est $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$.

- Déterminer l'énergie cinétique du disque.

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2 \quad \text{avec : } J_{\Delta} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$E_C = \frac{1}{4} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{4} \times 0,8 \times (0,3)^2 \times \left(\frac{100 \times 2\pi}{60} \right)^2$$

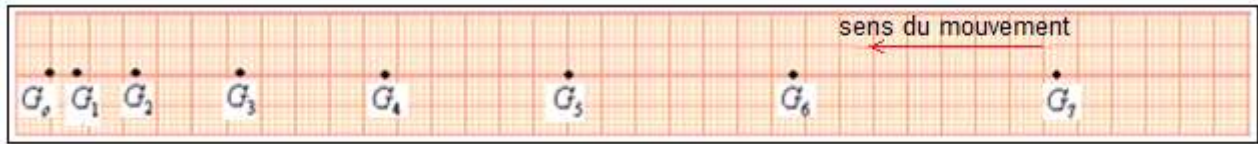
$$E_C \approx 0,22 J$$

II- Théorème de l'énergie cinétique :

1- Activité :

On abandonne, sans vitesse initiale, un autoporteur de masse $m = 700g$ sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle $\alpha = 10^\circ$ par rapport à l'horizontale.

On enregistre les positions du centre d'inertie toutes les $60ms$, on obtient l'enregistrement :



$$G_0G_1 = 3mm, G_1G_2 = 9mm, G_2G_3 = 15mm, G_3G_4 = 21mm, G_4G_5 = 27mm, G_5G_6 = 33mm, G_6G_7 = 39mm$$

On prend : $g = 9,8 N/kg$

- 1- Faire le bilan des forces extérieures agissant sur le mobile.
- 2- Déterminer l'expression de travail de chaque force, quand le centre d'inertie de l'autoporteur se déplace de la position G_3 à la position G_5 . Déduire la somme des travaux des forces appliquées sur l'autoporteur entre ces deux positions $\sum W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{F})$.
- 3- Calculer l'énergie cinétique de l'autoporteur dans chaque positions G_3 et G_5 . Et déduire $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ la variation de l'énergie cinétique de l'autoporteur.
- 4- Déduire la relation entre $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ de l'autoporteur et $\sum W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{F})$.

Exploitation :

1- L'autoporteur est soumis à deux forces :

\vec{P} : Poids de l'autoporteur

\vec{R} : Réaction de plan incliné

2- L'expression de travail de poids :

$$W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{P}) = m \cdot g \cdot G_3G_5 \cdot \sin\alpha = 0,7 \times 9,8 \times 48 \times 10^{-3} \times \sin(10^\circ) = 0,057 J$$

$$W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{R}) = 0 \rightarrow \vec{R} \perp \overrightarrow{G_3G_5}$$

$$\sum W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{F}) = W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{P}) + W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{R}) = 0,057 J$$

3- Energie E_{C3} et E_{C5} :

$$\text{Vitesse instantanée en } G_3 : v_3 = \frac{G_2 G_4}{2\tau} = \frac{36 \times 10^{-3}}{2 \times 60 \times 10^{-3}} = 0,30 \text{ m/s}$$

$$\text{Vitesse instantanée en } G_5 : v_5 = \frac{G_4 G_6}{2\tau} = \frac{60 \times 10^{-3}}{2 \times 60 \times 10^{-3}} = 0,50 \text{ m/s}$$

$$\text{Energie cinétique } E_{C3} : E_{C3} = \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 = \frac{1}{2} \times 0,7 \times 0,3^2 = 0,0315 \text{ J}$$

$$\text{Energie cinétique } E_{C5} : E_{C5} = \frac{1}{2} m \cdot v_5^2 = \frac{1}{2} \times 0,7 \times 0,5^2 = 0,0875 \text{ J}$$

Variation de l'énergie cinétique ΔE_C :

$$\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3} = 0,0875 - 0,0315 = 0,056 \text{ J}$$

4- Conclusion :
$$\Delta E_C \simeq \sum W_{G_3 \rightarrow G_5}(\vec{F})$$

2- Enoncé du théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique ΔE_C d'un solide en translation ou en rotation autour d'un axe fixe, entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures appliquées au solide entre ces deux instants t_1 et t_2 .

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

Cas de mouvement de translation : $\Delta E_C = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$

Cas de mouvement de rotation : $\Delta E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega_1^2$

3- Activité 2 :

Une bille d'acier de masse $m = 100g$, est maintenue par un électroaimant ; quand on ouvre le circuit d'alimentation, la bille tombe d'un mouvement rectiligne vertical.

Grace à un dispositif convenable on a obtenu les résultats indiqués dans le tableau suivant :

Hauteur h (en m)	Temps t (en s)	Vitesse v (en m/s)	v^2 (en m^2/s^2)
0,00	0,00	0,00	
0,1	142,85	1,40	
0,2	202,04	1,98	

0,4	285,71	2,80	
0,6	350,00	3,43	
0,8	404,08	3,96	
1,0	451,02	4,42	

1- Compléter le tableau ci-dessus.

2- Tracer la courbe $v^2 = f(h)$ représentant la variation v^2 en fonction de h . Que pouvons-nous en déduire.

3- Trouver le coefficient directeur de la courbe obtenu en précisant son unité.

On donne $g = 9,8 \text{ N/kg}$ et $1 \text{ N/kg} = 1 \text{ m/s}^2$

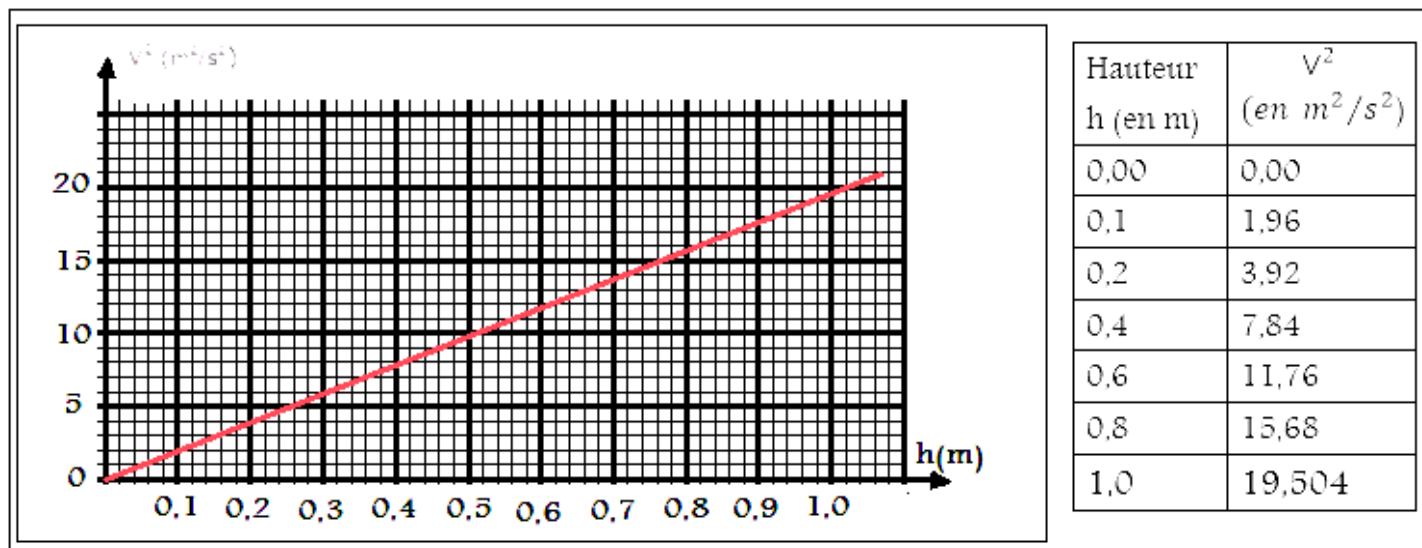
4- comparer la grandeur $\frac{1}{2} m.v^2$ et (\vec{P}) . Que peut-on en conclure ?

5- vérifier par calcul la relation $\Delta E_C = W(\vec{P})$ à la hauteur $h = 1,0\text{m}$.

Correction

1- voir tableau ci-dessus :

2- Voir courbe $v^2 = f(h)$:



3- La courbe est une droite son équation est : $v^2 = a.h$

a est le coefficient directeur sa valeur est : $a = \frac{\Delta v^2}{\Delta h} = \frac{7,84-1,96}{0,4-0,1} = 19,6 \text{ m/s}^2$

4- Comparaison des 2 grandeurs :

On remarque que : $a = 2g$ avec $g = 9,8 \text{ N/kg} = 9,8 \text{ m/s}^2$

Donc l'équation de la droite est : $v^2 = 2g \cdot h$

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2g \cdot h$$

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

$\frac{1}{2}m \cdot v^2$ représente la variation de l'énergie cinétique ΔE_C et $m \cdot g \cdot h$ représente le travail de poids $W(\vec{P})$ donc :

$$\Delta E_C = W(\vec{P})$$

5- Vérification de la relation :

$$W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot h = 0,1 \times 9,8 \times 1,0 = 0,98 \text{ N}$$

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 19,54 = 0,98 \text{ J}$$

Donc :

$$\Delta E_C = W(\vec{P})$$

Exercices d'applications

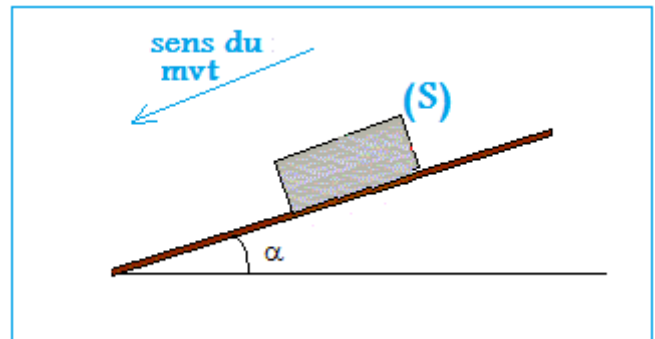
Exercice 1 :

Un solide (S), de masse $m = 60 \text{ kg}$, glisse sur un plan incliné d'angle $\alpha = 15^\circ$ par rapport au plan horizontal (voir figure).

Le solide (S) est lâché du point A sans vitesse initiale, après un parcours de $AB = 100 \text{ m}$ sa vitesse devient $V_B = 45 \text{ km/h}$. On donne $g = 10 \text{ N/kg}$

1- Calculer la force de frottement f sachant que son intensité reste constante.

2- le solide (S) poursuit son mouvement sur le plan horizontal BC. Calculer la distance parcourue par le solide sur le plan horizontal avant de s'arrêter.



Corrigé

1- Système étudié : le solide S

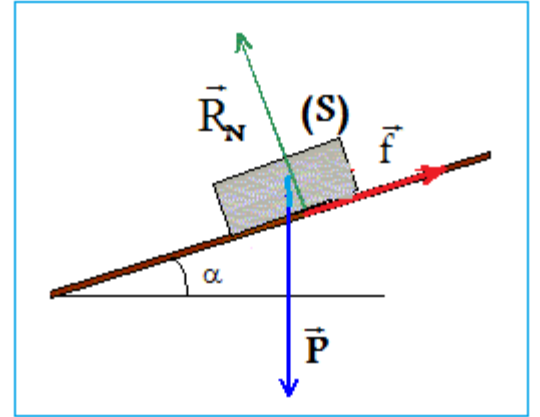
Bilan des forces exercées sur le solide (S) : \vec{P} ; \vec{R}

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le solide (S) :

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R})$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{R}_N \cdot \vec{AB} + \vec{f} \cdot \vec{AB}$$
$$= 0 - f \cdot AB$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = m \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha - f \cdot AB$$



$$f \cdot AB = m \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$$

$$f = \frac{m \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2}{AB} = m \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{m \cdot v_B^2}{2AB}$$

$$f = 60 \times 10 \times \sin(15^\circ) - \frac{60 \times \left(\frac{45}{3,6}\right)^2}{2 \times 100} = 142 \text{ N}$$

2- Distance parcourue L :

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le solide (S) :

$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{B \rightarrow C}(\vec{P}) + W_{B \rightarrow C}(\vec{R})$$

$$0 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = -f \cdot L$$

$$L = \frac{m \cdot v_B^2}{2 \cdot f} \Rightarrow L = \frac{60 \times \left(\frac{45}{3,6}\right)^2}{2 \times 142} = 33 \text{ m}$$

Exercice 2 :

Un moteur effectue une puissance constante sur un cylindre $P = 10W$.

Le cylindre de masse $m = 2 kg$ et de rayon $r = 20 cm$, tourne autour d'un axe fixe (Δ) qui passe par son centre d'inertie.

On donne le moment d'inertie du cylindre : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}m.r^2$

1- Calculer la durée du temps Δt nécessaire pour que la fréquence du cylindre devienne $N = 10 tr/s$, on considère que les frottements sont négligeables.

2- A la fréquence $N = 10 tr/s$, on applique tangentiellement à la circonférence du cylindre une force \vec{F} constante, pour que le mouvement devienne uniforme, calculer la valeur de la force F .

Corrigé

1- La durée Δt nécessaire pour que la fréquence du cylindre devienne $N = 10 tr/s$:

Système étudié : le cylindre

Bilan des forces exercées sur le cylindre :

\vec{P} : Poids du cylindre

\vec{R} : Action de l'axe de rotation

Action du moment du couple moteur M_c .

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le cylindre :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(C)$$

$$W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$$

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}.\omega^2 - 0 = 0 + 0 + \mathcal{P}.\Delta t$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2}m.r^2 ; \omega = 2\pi.N$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m.r^2.(2\pi N)^2 = \mathcal{P}.\Delta t$$

$$\pi^2.m.r^2.N^2 = \mathcal{P}.\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\pi^2.m.r^2.N^2}{\mathcal{P}}$$

$$\Delta t = \frac{\pi^2 \times 2 \times 0,2^2 \times 10^2}{10} = 7,9 s$$

2- La valeur de la force F :

Bilan des forces exercées sur le cylindre :

\vec{P} : Poids du cylindre

\vec{R} : Action de l'axe de rotation

Action du moment du moteur C

L'action de la force \vec{F}

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le cylindre :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(C) + W(\vec{F})$$

$$0 = W(C) + W(\vec{F})$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) + M(C) = 0$$

$$\text{on a : } M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \cdot r \text{ et } M(C)\omega = \mathcal{P} \Rightarrow M(C) = \frac{\mathcal{P}}{\omega}$$

$$-F \cdot r + \frac{\mathcal{P}}{\omega} = 0$$

$$F = \frac{\mathcal{P}}{2\pi \cdot N \cdot r}$$

$$F = \frac{10}{2\pi \times 10 \times 0,2} = 0,79 \text{ N}$$