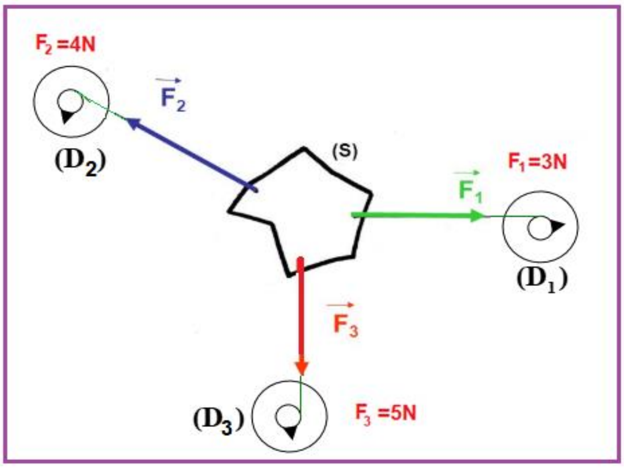
Equilibre d'un solide soumis à trois forces non parallèles

I-Condition d'équilibre d'un solide soumis à trois forces :

1-Expérience :

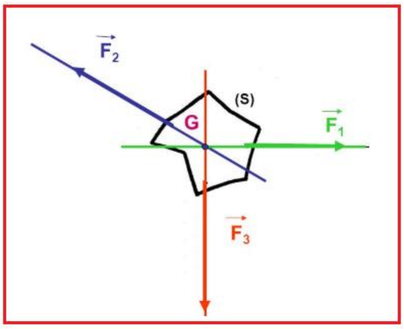
On étudie l'équilibre d'une plaque de masse négligeable.
La plaque est soumis à l'action de trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.



2-Observations :

On constate que les trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$:

- Sont situées dans le même plan, on dit qu'elles sont **coplanaires** ;
- Se coupent en un même point O, on dit qu'elles sont **concourantes**.

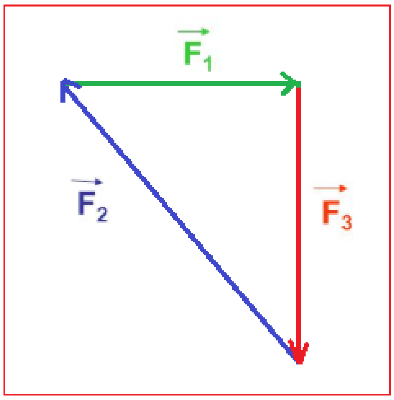


3-Relation entre les vecteurs forces :

3-1-Méthode graphique :

En traçant le polygone des forces à une échelle choisie. On place l'origine d'un des vecteurs à l'extrémité de l'autre vecteur et on complète le triangle.
La ligne polygonale des trois forces est fermée traduit graphiquement la relation vectorielle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$



3-2-Méthode analytique :

Dans un repère orthonormé les coordonnées de chaque force sont :

$$\vec{F}_1 \begin{pmatrix} F_{1x} = 3 \\ F_{1y} = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 \begin{pmatrix} F_{2x} = -3 \\ F_{2y} = 4 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 \begin{pmatrix} F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = -4 \end{pmatrix}$$

La projection des trois forces sur l'axe Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \end{cases}$$

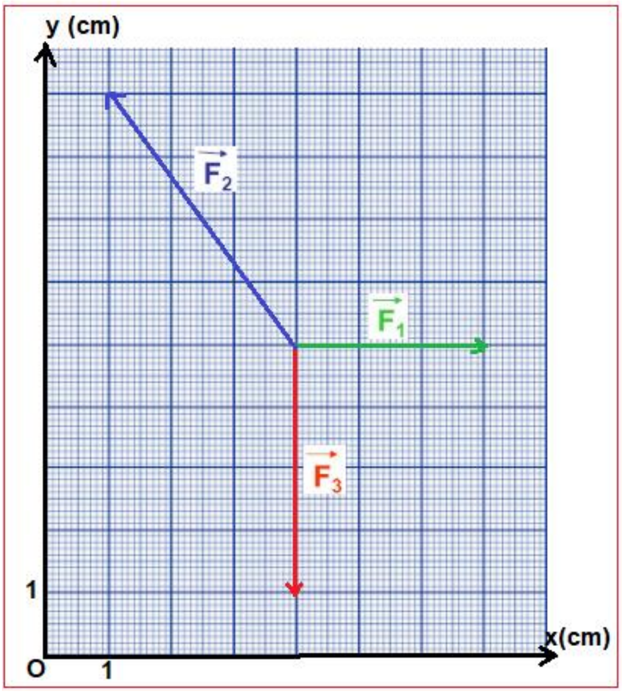
Donc : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

4-Condition d'équilibre :

Si un slide soumis à trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ non parallèles est en équilibre :

-les trois forces sont coplanaires et concourantes.

-la somme vectorielle des trois forces est égale au vecteur nul : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

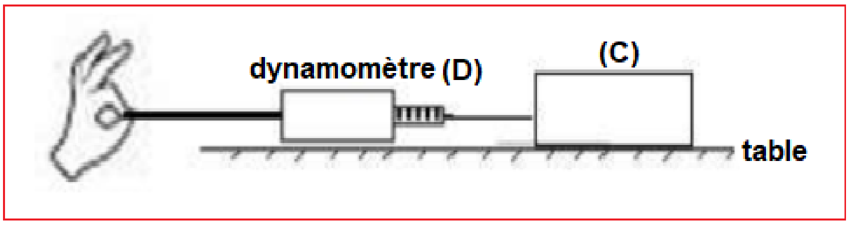


II-Force de frottement :

1-Expérience :

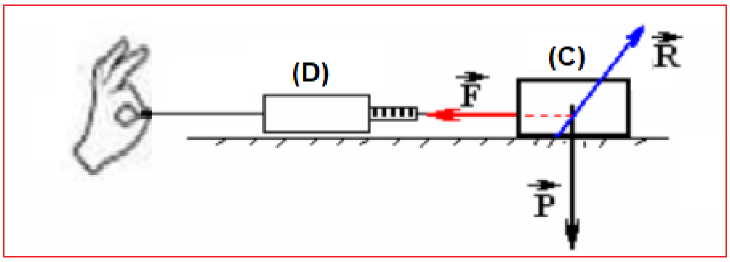
Sur une table horizontal, on place un corps (C) sur lequel on exerce une force $\vec{F}$ à l'aide d'un dynamomètre (D), comme l'indique la figure.

On augmente successivement l'intensité de la force $\vec{F}$ jusqu'à ce que le corps (C) se mette en mouvement.



2-Angle de frottement :

On constate que la réaction $\vec{R}$ exercée par la table n'est pas perpendiculaire à la surface de contact, elle forme un angle φ avec la normale qu'on appelle angle de frottement.



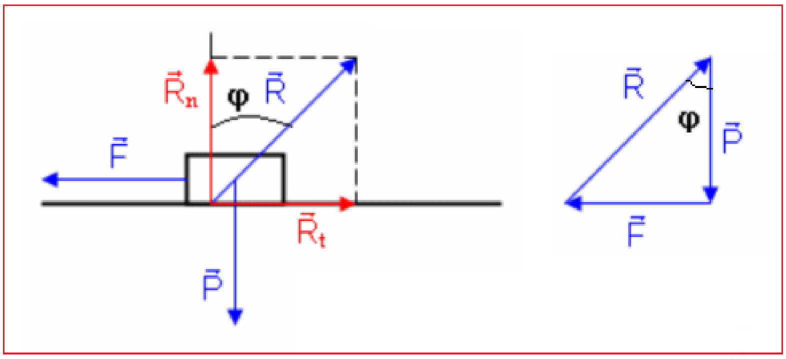
On peut décomposer la réaction $\vec{R}$ en deux composantes :

$\vec{R}_N$: La composante normale.

$\vec{R}_T$: La composante tangentielle qui s'appelle force de frottement $\vec{f}$.

$$tan\varphi = \frac{R_T}{R_N}$$

On appelle le **coefficient de frottement** : $k = tan\varphi$



3-Angle de frottement statique :

Le corps (C) est en équilibre sous l'action de trois forces : $\vec{F}$, $\vec{R}$ et son poids $\vec{P}$.

A cause de frottement le corps (C) reste en équilibre tend que la force $\vec{F}$ est intérieure à une valeur minimale $\vec{F}_m$.

- ❖ $F < F_m$ le solide est en équilibre $\varphi < \varphi_0$ tel que φ_0 est l'**angle de frottement statique**.
- ❖ $F > F_m$ le solide est en mouvement $\varphi > \varphi_0$.

On définit le **coefficient de l'angle statique k_0** par la relation : $k_0 = tan\varphi_0$

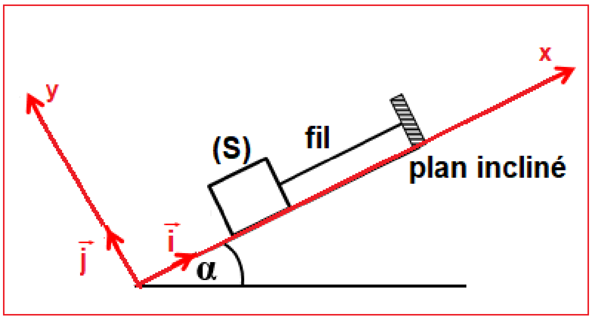
III-Exercice d'application :

Un solide (S) est attaché à un fil inextensible sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (voir figure).

Le contact entre la plan incliné et le solide se fait sans frottements.

Déterminer les intensités des forces appliquées sur le solide (S).

On donne $m = 500\ g$; $g = 10\ N.kg^{-1}$ et $\alpha = 30°$.



Solution :

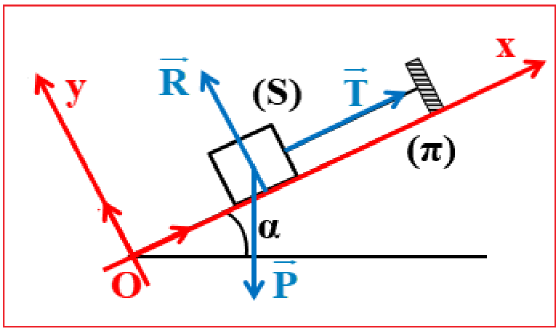
-système étudié : le corps (S)

-bilan des forces qui s'exercent sur le corps (S) :

$\vec{R}$: la réaction du plan incliné.

$\vec{T}$: la tension du fil.

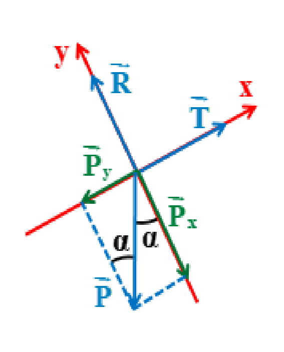
$\vec{P}$: le poids du solide (S).



-Le solide (S) est en équilibre on écrit : $\vec{R}+\vec{T}+\vec{P}=\vec{0}$

La projection des forces sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} R_x+T_x+P_x=0 \\ R_y+T_y+P_y=0 \end{cases}$$



$$\sin\alpha=\frac{P_x}{P}\Rightarrow P_x=P.\sin\alpha$$

$$\boxed{P_x=m.g.\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{P_y}{P}\Rightarrow P_y=P.\cos\alpha$$

$$\boxed{P_y=m.g.\sin\alpha}$$

Les coordonnées des forces dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont :

$$\vec{R}\begin{cases} R_x=0 \\ R_y=R \end{cases} \qquad \vec{T}\begin{cases} T_x=T \\ T_y=0 \end{cases} \qquad \vec{P}\begin{cases} P_x=m.g.\sin\alpha \\ P_y=m.g.\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0+T+m.g.\sin\alpha=0 \\ R+0+m.g.\cos\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T=m.g.\sin\alpha \\ R=m.g.\cos\alpha \end{cases}$$

A.N :

$$\begin{cases} T=0{,}5\times10\times\sin(30°) \\ R=0{,}5\times10\times\cos(30°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{T=2,5\ N} \\ \boldsymbol{R=4,33\ N} \end{cases}$$

Remarque :

Les mêmes résultats sont obtenus en utilisant la méthode graphique.

$$\sin\alpha=\frac{T}{P}\Rightarrow T=P.\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{R}{P}\Rightarrow R=P.\cos\alpha$$