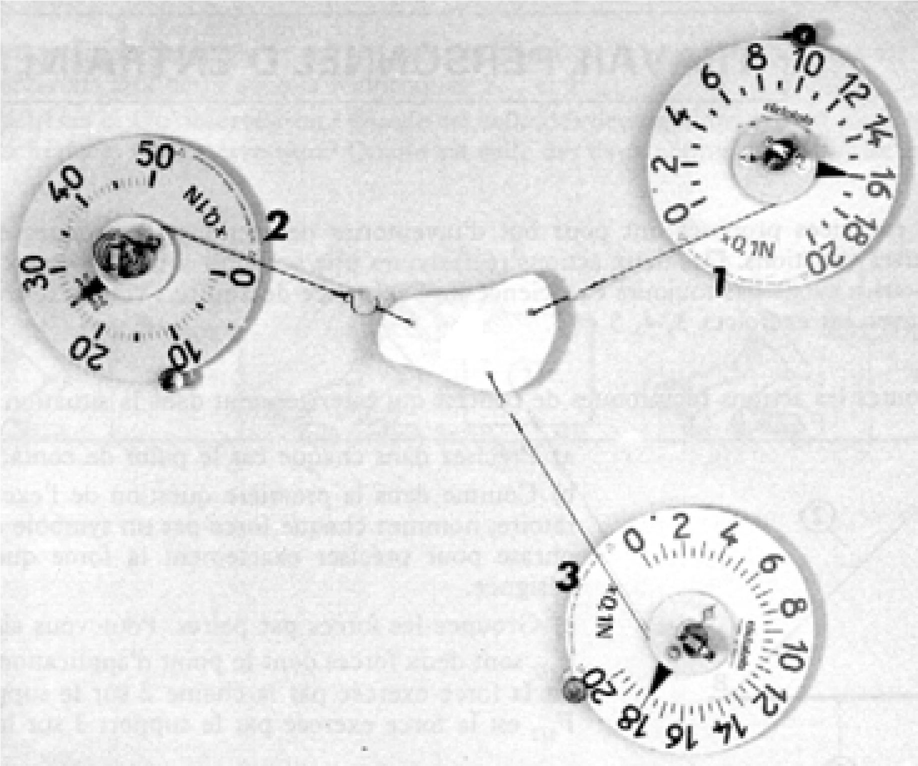
Unité 6 : Equilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces non parallèles

توازن جسم صلب خاضع لثلاث قوى غير متوازية

I. Conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces non parallèles

Une plaque de polystyrène légère (de poids négligeable) est soumise à l'action de trois forces par l'intermédiaire de trois fils tendus. Trois dynamomètres mesurent ces forces. (Voir ci-dessous)

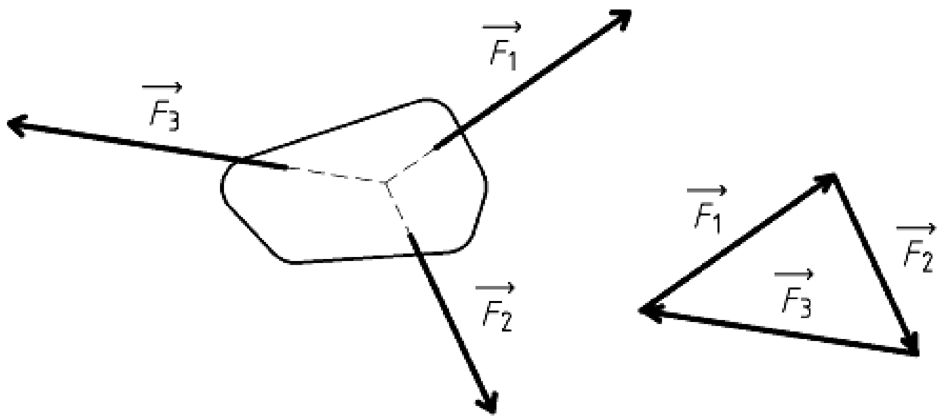


1. Faire inventaire les forces exercées sur le corps solide.
2. Représenter les forces sur la figure, en utilisant l'échelle suivante : $1cm \longrightarrow 4N$
3. Prolonger les supports (lignes d'actions) du forces, que observez-vous.
4. Tracer le polygone dynamique c-à-d la somme vectorielle des forces , que remarquez – vous.

<u>Enoncée : Conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à trois forces non parallèle.</u>

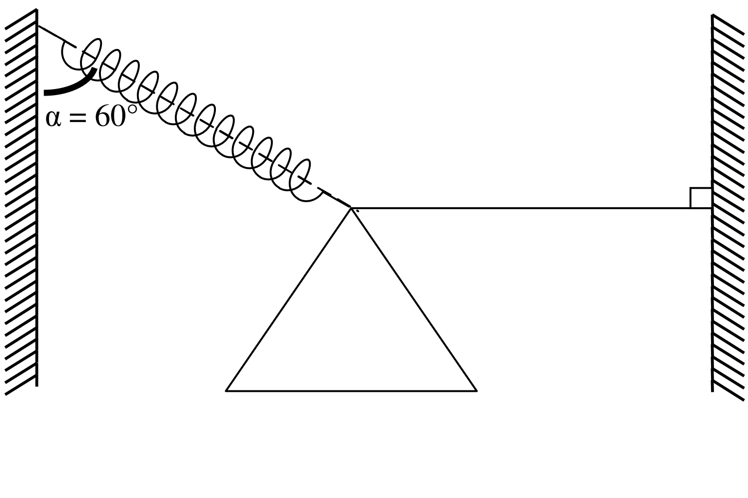
Si un système est soumis à trois forces non parallèles, alors :

- Les trois forces sont dans même plan on dit qu'ils sont coplanaires
- Les directions des trois forces se coupent en un même point ils sont concourantes en un même point.
- La somme des trois vecteurs représentant les forces est égale au vecteur nul. La construction graphique de cette somme se nomme triangle des forces, dynamique fermé ou encore polygone dynamique.



Exercice d'application

Une enseigne d'une boutique de masse $m = 800g$ est maintenue à l'équilibre par un câble fixé à un mur vertical et un ressort de constante de raideur $K = 50N / Kg$ fixé à un autre mur vertical. Voir la figure ci contre.



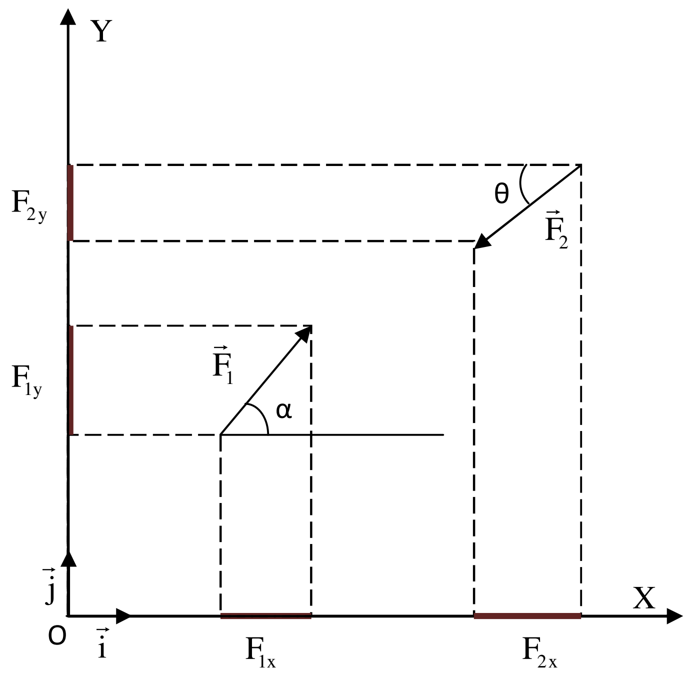
1. Quels sont les forces exercées sur l'enseigne de boutique.
2. En utilisant la construction géométrique (le polygone dynamique), déterminer la valeur de la tension du câble et celle du ressort.
3. Détermine l'allongement du ressort.

II. Application : réaction du support

1. Coordonnées de vecteur force (méthode analytique)

Considérons un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$.

On fait la projection des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sur les axes de repère.



La projection de $\vec{F}_1$ donne les coordonnées cartésiennes F_{1x} et F_{1y}, on écrit : $\vec{F}_1 = F_{1x}.\vec{i} + F_{1y}.\vec{j}$ ou encore

$$\vec{F}_1\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2y} \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_1 \;{}_{(\vec{i},\vec{j})}\left|\begin{matrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{matrix}\right.$$

Relation entre F_{1x} (ou F_{1y})avec F et l'angle α :

$\sin\alpha = \dfrac{|F_{1x}|}{F}$ Or F_{1x} est positif alors $\sin\alpha = \dfrac{F_{1x}}{F}$ donc $\boxed{F_{1x} = F\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \dfrac{|F_{1y}|}{F}$ Or F_{1y} est positif alors $\cos\alpha = \dfrac{F_{1y}}{F}$ donc $\boxed{F_{1y} = F\cos\alpha}$

La projection de $\vec{F}_2$ donne les coordonnées cartésiennes F_{2x} et F_{2y}, on écrit : $\vec{F}_2 = F_{2x}.\vec{i} + F_{2y}.\vec{j}$ ou encore

$$\vec{F}_2\begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_2 \;{}_{(\vec{i},\vec{j})}\left|\begin{matrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{matrix}\right.$$

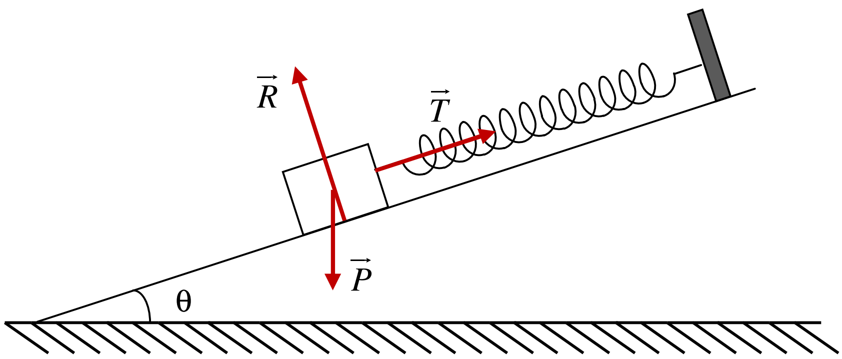
Relation entre F_{2x} (ou F_{2y}) avec F et l'angle α :

$\sin\alpha = \dfrac{|F_{2x}|}{F}$ Or F_{2x} est négatif alors $\sin\alpha = \dfrac{-F_{2x}}{F}$ donc $\boxed{F_{2x} = -F\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{|F_{2y}|}{F}$ Or F_{2y} est négatif alors $\cos\alpha = \frac{-F_{2y}}{F}$ donc $\boxed{F_{2y} = -F\cos\alpha}$

La norme d'une force $\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j}$ est : $F = \|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

2. **Equilibre d'un corps solide sur une surface en cas de frottement négligeable.**
   Considérons le cas expérimental suivant.
   Un autoporteur est maintenu à l'équilibre sur une surface lisse (coussin d'air) inclinée faisant un angle 18° avec l'horizontal, par un ressort (dynamomètre) son l'autre extrémité est fixé à un support fixe (voir la figure). La valeur indiquée par le dynamomètre est 1N, on donne g=10N/Kg.



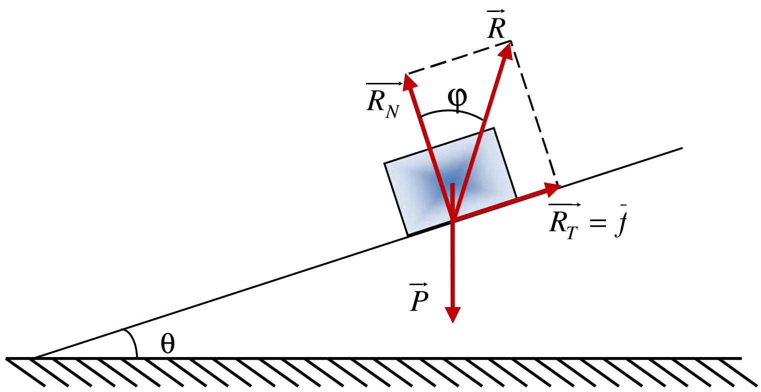
1. Quelles sont les forces appliquées sur l'autoporteur
2. En utilisant le polygone dynamique. Trouver les caractéristiques de la force de la réaction.
3. En utilisant la méthode analytique, trouver les caractéristique de la force de réaction.

Résumé : en cas d'absence de frottement la force de réaction exercée par une surface sur un corps solde en contacte avec elle est perpendiculaire sur la surface vers le haut.

3. **Equilibre d'un corps solide sur une surface en cas de frottement**

Considérons le cas expérimental suivant :

Un corps solide en équilibre sur une surface rugueuse (contacte avec frottement) inclinée d'un angle θ avec l'horizontal. Le corps reste en repos tant que l'angle θ est (soit) inférieur à un angle s'appelle angle critique ou encore l'angle de frottement statique ; notée φ_0 .



Le corps est soumis à deux forces, sont poids $\vec{P}$ et la réaction du plan incliné $\vec{R}$.

Le corps étant au repos, ces deux forces doivent être en équilibre (leur somme doit être nulle):

$\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$

On peut décomposer la réaction du plan incliné en une partie normale $\vec{R}_N$ et une partie tangentielle $\vec{R}_T$, qui est due au frottement : $\vec{R}=\vec{R}_N+\vec{R}_T$

L'angle $\varphi=(\widehat{\vec{R},\vec{N}})$ s'appelle l'angle de frottement

Si l'on augmente l'inclinaison (c-à-d augmenter θ) donc φ l'angle de frottement augmente, l'équilibre reste possible aussi longtemps que $\varphi<\varphi_0$, alors l'équilibre n'est plus possible, et le corps doit glisser. Il existe donc une valeur critique de l'inclinaison, c-à-d une valeur critique de l'angle de frottement s'appelle angle de frottement statique φ_0 .

On appelle coefficient de frottement la grandeur sans unité définie par : $K=\tan\varphi$

D'après le schéma précédente (en utilisant les composantes de $\vec{R}$) on écrit : $K=\tan\varphi=\left|\frac{R_T}{R_N}\right|$

On appelle coefficient de frottement statique la grandeur sans unité définie par : $K_0=\tan\varphi_0$

Exercice :

Dans tous les exercices, on prendra g=9,81N.kg^{-1}.

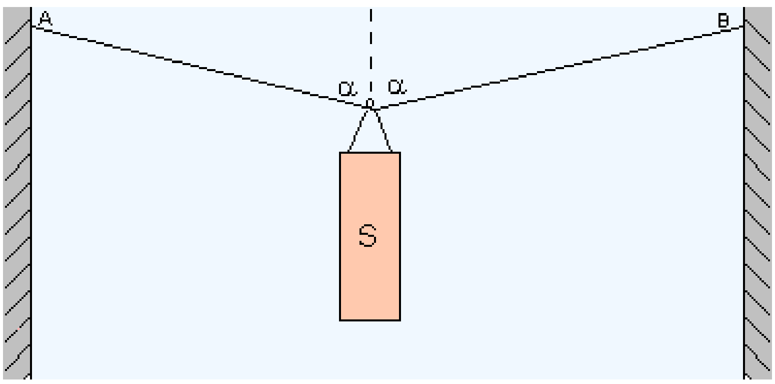
Solide suspendu:

Un objet S de masse m=55kg est suspendu par deux câbles fixés sur un anneau. Les câbles sont fixés en deux points A et B situés sur la même horizontale. L'angle que fait la verticale de l'anneau avec chacun des deux câbles a pour mesure a=70°.

1. Quelles sont les forces exercées sur le système {objet S + anneau}?

2. Quelle relation existe-t-il entre ces vecteurs forces?

3. Déterminer les valeurs T_1 et T_2 des tensions des câbles.



Véhicule en mouvement rectiligne uniforme:

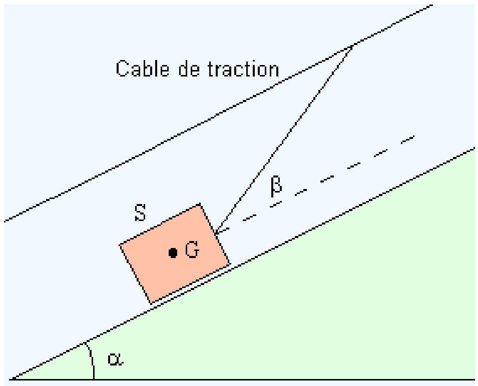
Un véhicule, de masse m=1300kg, roule à vitesse constante $V=90 km.h^{-1}$ sur une route rectiligne et horizontale. L'ensemble des forces s'opposant à l'avancement est équivalent à une force unique, opposée au vecteur vitesse, de valeur f=800N.

1. Déterminer la valeur de la force motrice développée par le moteur.

2. Le véhicule aborde, à présent, une côte formant un angle de 14° avec l'horizontale. Quelle doit être la nouvelle valeur de la force motrice si le conducteur maintient la même vitesse et que l'ensemble des forces s'opposant à l'avancement est toujours équivalent à une force unique, opposée au vecteur vitesse, de valeur f=800N?

Mouvement sur un plan incliné:

Un solide de masse m=5kg glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle a=15° par rapport à l'horizontale. Il est entraîné à vitesse constante par un câble faisant un angle α=20° avec la ligne de plus grande pente du plan incliné.



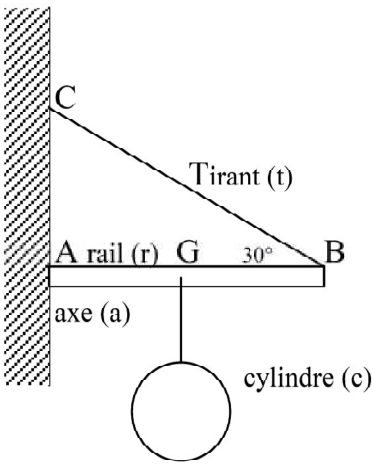
1. Déterminer la tension du fil de traction.

2. Déterminer la réaction du plan incliné.

Exercice :

Lors d'une opération de maintenance effectuée sur une repasseuse automatique, on doit sortir un cylindre d'acier dont la masse est $m_c = 300$ kg.

1. Calculer la valeur du poids ρ Pc de ce cylindre. (On prendra g = 10 N/kg).
2. Le cylindre est soulevé à l'aide d'une potence à tirant constituée d'un rail (r) mobile autour d'un axe (a) maintenu horizontal par un tirant (t).
   On se propose d'étudier l'équilibre du rail (r) lorsque le cylindre est situé sur la verticale passant par G.
   Ce rail est soumis à trois forces dont l'une est totalement déterminée et les deux autres partiellement définies :



$\vec{P}$: Poids total du rail et du cylindre

$\vec{F}_1$: Force exercée par le tirant sur le rail.

$\vec{F}_2$: Force exercée par l'axe sur le rail.

a) Représenter le poids $\vec{P}$ de valeur 5 000 N sur le schéma 1 suivant.

b) Déterminer sur le schéma 1, le point de concours I des droites d'action des trois forces puis tracer celle de $\vec{F}_1$

c) Construire le dynamique des forces : $\vec{P}+\vec{F}_1+\vec{F}_2$ à partir du point O (schéma 2).

d) Déterminer graphiquement les valeurs de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Echelle : 1 cm pour 1000 N.

Schéma 1

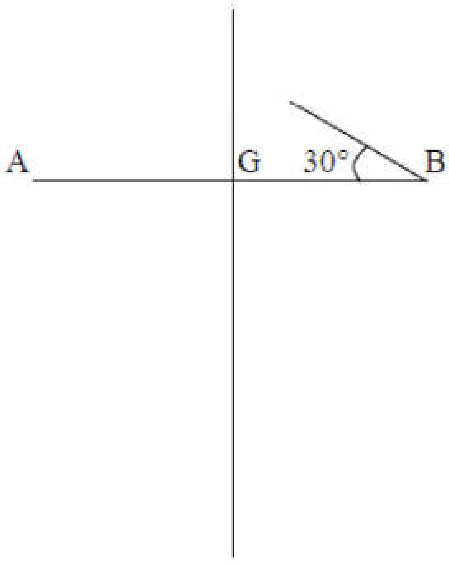


Schéma 2