

الصفحة 1 5	<p>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا المسالك الدولية – خيار فرنسية الدورة العادية 2018 -الموضوع-</p>	<p>المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي</p> <p>المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</p>
★★	NS 24F	

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : " أ " و " ب " – خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice 1 se rapporte aux structures algébriques(3.5 pts)
- L'exercice 2 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)
- L'exercice 3 se rapporte aux nombres complexes(3.5 pts)
- L'exercice 4 se rapporte à l'analyse(7.5 pts)
- L'exercice 5 se rapporte à l'analyse(2.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
 L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau

unitaire, de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que

$(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

0.25 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{C}), +)$

0.25 2- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$

0.5 b) On pose $J = M(0, 1)$. Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$

0.5 3-a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$

0.5 b) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

4- Soit j l'application de \mathbb{C}^* vers $M_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}) ; \varphi(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$$

0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \cdot) vers $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$

0.5 b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que : $j(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.25 c) En déduire que (E^*, \cdot) est un groupe commutatif.

0.25 5- Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2: (3 points)

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ ($k \in \mathbb{Z}^*$)

0.5 1- Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ alors $x^{p-5} \equiv 1 \pmod{p}$

2- Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 c) Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$

0.5 d) En déduire que : $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 3-Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x^{62} \equiv 1 \pmod{67}$

EXERCICE 3: (3.5 points)

Soit m un nombre complexe.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

0.25 1-a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

0.5 b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

0.5 2- Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a = -1 - i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$

1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

0.25 a) Vérifier que Ω est le centre de R

0.5 b) Déterminer l'affixe b de B , où B est le point tel que : $A = R(B)$

0.5 2-a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

0.5 b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

0.5 c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 : (7.5 points)

PARTIE I :

0.5 1-a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$

b) On utilisant le changement de variable $u = t^2$, montrer que :

0.5 $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$

0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

0.25 2- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

PARTIE II :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 (On pourra utiliser le résultat de la question I-2)

0.75 c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

0.25 c) Vérifier que : $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

3- Représenter graphiquement la courbe (C)

0.5

(On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0)

PARTIE III :

1- On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$



0.5 b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puis montrer que $g(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$

0.25 c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$

2- Soit a un réel de l'intervalle $]0, +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

EXERCICE 5 : (2.5 points)

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

0.5 1- Montrer que F est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) \geq x$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0.5 b) Montrer que F est impaire, en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

0.5 c) Montrer que F est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

0.5 d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$

FIN



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : " أ " و " ب " - خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

Exercice1	Indications de solutions	Barème
1-	E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\square), +)$	0.25
2-	a) E sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\square), +, \cdot)$	0.25
	b) (I, J) famille libre.....0.25 (I, J) famille génératrice et la conclusion.....0.25	0.5
3-	a) E partie stable	0.5
	b) $(E, +, \times)$ anneau commutatif	0.5
4-	a) φ homomorphisme	0.5
	b) $\varphi(\square^*) = E^*$	0.5
	c) (E^*, \times) groupe commutatif	0.25
5-	$(E, +, \times)$ corps commutatif	0.25

Exercice2	Indications de solutions	Barème
1-	L'implication : $(p - 5$ est paire)	0.5
2-	a) $x \wedge p = 1$ (théorème de BEZOUT ou toute autre méthode juste)	0.5
	b) $x^{p-1} \equiv 1 [p]$ (théorème de FERMAT ou toute autre méthode juste)	0.5

	c)	Vérification	0.5
	d)	Déduction : $x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv x^{k(p-5)} \quad [p]$	0.5
3-		67 premier et $67 = 3 + 4 \times 16$0.25 Application des résultats de l'exercice.....0.25	0.5

Exercice3			Indications de solutions	Barème
I-	1-	a)	Vérification	0.25
		b)	Pour $m = 2 \quad S = \{-1 - i\}$ Pour $m \neq 2 \quad S = \{-1 - i, -1 + i - im\}$	0.5
	2-		-Forme exponentielle de la première solution0.25	0.5
			- Forme exponentielle de la deuxième solution0.25	
II-	1-	a)	vérification	0.25
		b)	$b = 2$	0.5
	2-	a)	Vérification de l'égalité	0.5
		b)	L'équivalence : 0.25 pour chaque implication La réponse sera acceptée même si le candidat ne discute pas le cas particulier $M = A$	0.5
		c)	Reconnaitre le cercle.....0.25 Détermination du centre et du rayon.....0.25 La réponse sera acceptée même si le candidat ne discute pas le cas particulier $M = A$	0.5

Exercice4			Indications de solutions	Barème
Partie I	1-	a)	L'égalité	0.5
		b)	L'égalité	0.5
		c)	La double inégalité : 0.25 pour chaque inégalité	0.5
	2-		Calcul de limite	0.25
Partie II	1-	a)	Continuité à droite en 0	0.25
		b)	Dérivabilité à droite en 0	0.5
		c)	Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$0.25	0.75
			Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$0.25	
	Interprétation graphique0.25			
	2-	a)	Dérivabilité.....0.25	0.5
			Calcul de la dérivée première.....0.25	
		b)	Monotonie de f	0.25
		c)	Vérification	0.25
	3-		Représentation graphique.....0.25	0.5
	Demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.....0.25			
Partie III	1-	a)	La double inégalité : 0.25 pour chaque inégalité	0.5
		b)	Monotonie de g0.25	0.5
			L'image de $]0, +\infty[$ par g0.25	
	c)	Existence et unicité de α	0.25	
	2-	a)	Signe de la suite	0.25
		b)	application de T.A.F ou I.A.F	0.5
		c)	par récurrence	0.5

		d) Convergence de la suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$	0.25
--	--	--	------

Exercice5	Indications de solutions	Barème
1-	F continue sur \square0.25	0.5
	F strictement croissante sur \square0.25	
2-	a) $F(x) \geq x$0.25	0.5
	Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$0.25	
	b) F impaire (on acceptera toute autre solution juste)0.25	0.5
	Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$0.25	
c) F une bijection	0.5	
d)	Dérivabilité de G en 0.....0.25	0.5
	Calcul de $G'(0)$0.25	