



التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V ".

نعتبر الأحداث التالية :

- R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء "
- B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء "
- R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "
- B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء "

$$\text{أحسب احتمال الحدين } R_1 \text{ و } B_1 \quad (1) \quad 1,00 \text{ ن}$$

$$\text{أحسب احتمال } B_2 \text{ علما أن } R_1 \text{ محقق، و احتمال } B_2 \text{ علما أن } R_1 \text{ محقق.} \quad (2) \quad 1,00 \text{ ن}$$

$$(3) \quad \text{بين أن : } P(B_2) = \frac{13}{21} \quad 0,50 \text{ ن}$$

$$(4) \quad \text{استنتج . } P(R_2) \quad 0,50 \text{ ن}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و نضع :

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) التالية :

$$(E) : z^2 - 2pz + 16 = 0 \quad (1) \quad 0,50 \text{ ن}$$

$$p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16 \quad (1) \quad 0,50 \text{ ن}$$

$$|z_1| < |z_2| \text{ على المعادلة } (E) \text{ بحيث :} \quad (2) \quad 0,50 \text{ ن}$$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعدد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .

(1) بين أنه عندما يتغير العدد θ في $[0; 2\pi]$ فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة (ع) ينبغي تحديد معادلة لها.

(ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1 M_2]$. و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi]$.

بين أن (Γ) إهليج بورتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .

- ن 0,50** ③ $\boxed{(\frac{b+4}{b-4}) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) \Leftrightarrow (ab = 16) \text{ و } b \in \mathbb{C} \setminus \{4\} \text{ لدينا :}}$

ن 0,50 ④ $\boxed{\text{ب} \text{ استنتج أن : } \left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)}$

ن 0,50 ج $\boxed{\left(\overrightarrow{M_1F}; \overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\left(\overrightarrow{M_2F}; \overrightarrow{M_2F'}\right)\right) [2\pi] \text{ : بين أن}}$

ن 0,50 ⑤ $\boxed{\text{أ} \text{ بين أن معادلة المماس } (T) \text{ للمنحنى } (\Gamma) \text{ في النقطة } P \text{ هي : } 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15}$

ن 0,50 ب $\boxed{\text{أ} \text{ بين أن : المماس } (T) \text{ عمودي على المستقيم } (M_1M_2)}$

التمرين الثالث : (3,0)

لكل زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 نعتبر المصفوفة :

في $E = \{M_{(a,b)} \mid a^2 - 2b^2 = 1\}$ لتكن E مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \in E \quad \text{تحقق أن} : \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{نضع} : \quad \textcircled{1}$$

٢) أ بين أن E جزء مستقر من $(\times, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ وأن القانون \times تبادلي في E .

ب) بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي \times . 0,50 ن

ج) بين أن (E, \times) زمرة تبادلية. 0,50 ن

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^{n+1} = A^n \times A \quad \text{و} \quad A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{نضع } ③$$

$$G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

تحقق أن : $G \subset E$ (١)

ب) لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية \times في E .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{حيث : } H = \{B^n / n \in \mathbb{N}\} \quad \text{يبين أن :}$$

ج) بين أن: $G \cup H$ زمرة جزئية من (E, \times)

التمرين الرابع : (9,5 ن)

(I) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

ول يكن (\mathcal{C}_n) المنحني الممثل للدالة g_n في معلم متعدد منتظم $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

ن 0,50 | ١) أدرس تغيرات الدالة : g_n

بـ بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) \quad : \text{أحسب} \quad \textcircled{1} \textcircled{2} \quad \underline{\underline{نـ 0,50}}$$

<p>بـ حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n)</p> <p>أـ أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C₁) و (C₂) الممثلين للدالتي g₁ و g₂</p> <p>بـ أرسم في نفس المعلم المنحنين (C₁) و (C₂).</p> <p>(نأخذ : ln 2 ≈ 0,7 و نعطي : i = j = 2 cm)</p> <p>أـ باستعمال متكاملة بالأجزاء، أحسب بدلالة x التكامل :</p> <p>بـ لنكن h₂ قصور الدالة g₂ على المجال [0, ln 2]</p> <p>أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المباني لـ h₂ حول محور الأفاسيل.</p> <p>أـ نضع : v_n = g_n(u_n)</p> <p>بين أن المتتاليتين (u_n)_{n ∈ N*} و (v_n)_{n ∈ N*} متقاربتان و حدد نهايتيهما.</p> <p>أـ نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على ℝ بما يلي :</p> <p>f_n(x) = x + e^{nx}</p> <p>و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد منظم مباشر (O, ī, j̄, k̄) .</p> <p>أـ أدرس تغيرات الدالة f_n.</p> <p>أـ إستنتاج أن المعادلة 0 = f_n(x) تقبل حلًا وحيدا α_n</p> <p>أـ بين أن α₁ ε] -ln 2 ; -1/2[</p> <p>بـ بين أن : (x - α₁) و (e^x + α₁) لهما نفس الإشارة.</p> <p>أـ لنكن φ الدالة العددية المعرفة على] -∞ ; -1/2[بما يلي :</p> <p>φ(x) = e^x - 1/√e x</p> <p>بين أن الدالة φ تناقصية على المجال] -∞ ; -1/2[</p> <p>بـ استنتاج أن : e^x + α₁ ≤ 1/√e x - α₁ </p> <p>أـ نضع : β_{n+1} = -e^{β_n} و لكل عدد صحيح طبيعي n :</p> <p>β₀ = -1/2</p> <p>(∀n ∈ N) : β_{n+1} - α₁ ≤ a β_n - α₁ حيث :</p> <p>بـ بين أن المتتالية (β_n)_{n ∈ N} متقاربة و حدد نهايتها.</p>	<p>0,50 ن</p> <p>0,50 ن</p> <p>0,50 ن</p> <p>1,00 ن</p> <p>0,50 ن</p> <p>1,00 ن</p> <p>1,00 ن</p> <p>0,50 ن</p>
---	---

التمرين الثاني : (4,5 ن)

١(1) ■

$$\begin{aligned}
 p^2 - (3 \cos\theta + 5i \sin\theta)^2 & \quad \text{لدينا :} \\
 &= (5\cos\theta + 3i\sin\theta)^2 - (3 \cos\theta + 5i \sin\theta)^2 \\
 &= 25 \cos^2 \theta - 9 \sin^2 \theta - 9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta \\
 &= 25(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= 25 - 9 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

٢(1) ■

$$\Delta' = p^2 - 16 = (3\cos\theta + 5i \sin\theta)^2 \quad \text{لدينا :}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين في \mathbb{C} .

$$z_1 = p + (3\cos\theta + 5i \sin\theta) = 2e^{-i\theta}$$

$$z_2 = p - (3\cos\theta + 5i \sin\theta) = 8e^{i\theta}$$

٣(2) ■

. يكن θ عنصرا من $[0; 2\pi]$

$$aff(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy \quad \text{نضع :}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(-\theta) + 2i \sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\theta) = x \\ -2 \sin(\theta) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2 \cos(\theta))^2 + (-2 \sin(\theta))^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

إذن : $M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تتنبئ إلى الدائرة (C) التي مركزها 0 وشعاعها 2.

٤(2) ■

لدينا P هي منتصف القطعة $[M_1 M_2]$

$$\Leftrightarrow aff(P) = \frac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = (\cos\theta - i \sin\theta) + 4(\cos\theta + i \sin\theta)$$

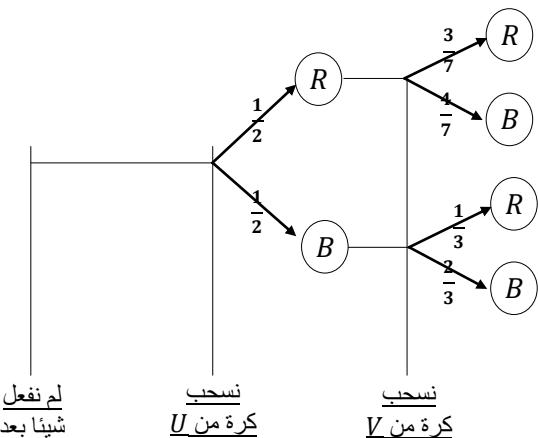
$$\Leftrightarrow aff(P) = 5 \cos\theta + 3i \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = p$$

التمرين الأول : (3,0 ن)

١ ■

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو استعمال شجرة الإحتمالات التالية :



$$P(R_1) = P(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا حسب الشجرة :}$$

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

$$P(B_2) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21}
 \end{aligned}$$

٤ ■

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد

$$P(B_2) + P(R_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - P(B_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : (استعمال الشجرة)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21}$$

٤ ■

$$P(5 \cos\theta ; 3 \sin\theta) \quad \text{لدينا :}$$

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T) : \frac{5x \cos\theta}{5^2} + \frac{3y \sin\theta}{3^2} = 1$$

$$(T) : 3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 15$$

٤ ■

$$(T) : 3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 15 \quad \text{لدينا :}$$

$$(T) : y = \left(\frac{-3 \cos\theta}{5 \sin\theta}\right)x + \left(\frac{3}{\sin\theta}\right)$$

إذن : ميل المستقيم (T) هو $\left(\frac{-3 \cos\theta}{5 \sin\theta}\right)$

لتحسب الآن m ميل المستقيم $(M_1 M_2)$

$$M_2 \left(\begin{matrix} 8 \cos\theta \\ 8 \sin\theta \end{matrix}\right) \quad \text{و} \quad M_1 \left(\begin{matrix} 2 \cos\theta \\ -2 \sin\theta \end{matrix}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$m = \frac{8 \sin\theta - (-2 \sin\theta)}{8 \cos\theta - 2 \cos\theta} = \left(\frac{5 \sin\theta}{3 \cos\theta}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\left(\frac{5 \sin\theta}{3 \cos\theta}\right) \quad \text{إذن ميل المستقيم } (M_1 M_2) \text{ هو}$$

وبالتالي : $(M_1 M_2)$ متعامدان لأن جداء ميليهما يساوي (-1)

$$\left(\frac{-3 \cos\theta}{5 \sin\theta}\right) \times \left(\frac{5 \sin\theta}{3 \cos\theta}\right) = -1$$

التمرين الثالث : (٣.٠)

١ ■

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{نضع :}$$

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$A = M(3,2) \in E \quad \text{إذن :}$$

١ ■

لتكن $M(c, d)$ و $M(a, b)$ مصفوفتين من E

$$M(a, b) \times M(c, d) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow M(a, b) \times M(c, d) = \begin{pmatrix} ac + 2bd & (bc + ad)\sqrt{2} \\ (bc + ad)\sqrt{2} & ac + 2bd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 2bd ; ad + bc) \quad (*)$$

نضع : $p = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \cos(\theta) \\ y = 3 \sin(\theta) \end{cases}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال ١ ■

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3}y\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

إذن عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi]$

فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه

و رؤوسه : $B'(0, -3)$ و $B(0, 3)$ و $A'(-5, 0)$ و $A(5, 0)$

و بورتاه : $F'(-4, 0)$ و $F(4, 0)$

(لأن : $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$)

٣ ■

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$ بحيث :

$$\Leftrightarrow (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4)$$

$$\Leftrightarrow 2ab = 32$$

$$\Leftrightarrow ab = 16$$

٣ ■

لدينا : $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$ و $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$

$$z_1 z_2 = 16e^{i\theta} e^{-i\theta} = 16 \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 + 4}{z_2 - 4}\right) = -\left(\frac{z_1 + 4}{z_1 - 4}\right) : \text{٣ ■}$$

٣ ■

نطاق من الكتابة : $\left(\frac{z_2 + 4}{z_2 - 4}\right) = -\left(\frac{z_1 + 4}{z_1 - 4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4 - z_1}{-4 - z_1}\right) = -\left(\frac{4 - z_2}{-4 - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) = -\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_1 F} ; \overrightarrow{M_1 F'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2 F} ; \overrightarrow{M_2 F'}\right) [2\pi]$$

نوصلنا كذلك إلى أن كل عنصر $M(a, b)$ يقبل مماثلاً و هو $(b, -a)$ زمرة.
نستنتج إذن أن (E, \times) زمرة.
و بما أن \times تبادلي في E .
فإن (E, \times) زمرة تبادلية.

ل يكن x عنصراً من G .

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) ; X = A^m$
نريد أن نبرهن على أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$ لدينا من أجل $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 0) \in E$: $n = 0$
نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$ لدينا : $A \in E$ و $A^n \in E$ لأن \times قانون داخلي في E .
إذن : $A^{n+1} \in E$ و بالتألي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$

$X = A^m \in E$ و منه :

خلاصة القول :

لإجابة على هذا السؤال يكفي أن نبين أن $(A^n)^{-1} = B^n$:
من أجل $(A^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^0$ لدينا : $n = 0$ نفترض أن :
 $(A^{n+1})^{-1} = (A^n \times A)^{-1}$ لدينا :
 $= A^{-1} \times (A^n)^{-1}$
 $= B \times B^n$
 $= B^{n+1}$

و بالتألي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (A^n)^{-1} = B^n$

ج ③ ■

لنبرهن في البداية على الخاصية $(\#)$ التالية :

$(\#) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

ل يكن m و n عددين صحيحين طبيعيين

نفصل هنا بين حالتين أساسيتين :

الحالة الأولى : إذا كان $m \geq n$:

$A^m \times B^n = A^{m-n} \times (A \times B)^n$ لدينا :
 $= A^{m-n} \times I$
 $= A^{m-n} \in G \subset G \cup H$

$$\begin{aligned} (ac + 2bd)^2 - 2(bc + ad)^2 &= (ac)^2 + 4(bd)^2 - 2(bc)^2 - 2(ad)^2 \\ &= c^2 \underbrace{(a^2 - 2b^2)}_1 + 2d^2 \underbrace{(2b^2 - a^2)}_{-1} \\ &= c^2 - 2d^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : $M(ac + 2bd ; bc + ad) \in E$
و بالتالي : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
بالاستعانة بالعلاقة (*) لدينا :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= M(ac + 2bd ; ad + bc) \\ &= M(ca + 2db ; cb + da) \\ &= M(c, d) \times M(a, b) \end{aligned}$$

إذن القانون \times تبادلي في E .

ج ② ■

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E

$$\begin{aligned} (M(a, b))^{-1} &= \frac{1}{\det M(a, b)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \text{ لدينا :} \\ &= \frac{1}{(a^2 - 2b^2)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} = M(a, -b) \in E \end{aligned}$$

و بالتالي : مقلوب كل مصفوفة $M(a, b)$ هو المصفوفة $M(a, -b)$

بتعبير آخر : $(M(a, b))^{-1} = M(a, -b)$

ج ② ■

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

\times قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

و بما أن \times تجميعي في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
فإن \times تجميعي كذلك في E .

و بما أن المصفوفة $I = M(1, 0)$ هي العنصر المحايد لـ \times في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

فإن $I = M(1, 0)$ هو العنصر المحايد لـ \times في E
و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائماً وحيداً.

الحالة الرابعة : إذا كان $Y \in G$ و $X \in H$

$$\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = B^n \text{ و } Y = A^m \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} X \times Y^{-1} &= B^n \times (A^m)^{-1} \\ &= B^n \times B^m \\ &= B^{m+n} \in H \subset G \cup H \end{aligned} \quad \text{و منه :}$$

$$X \times Y^{-1} \in G \cup H \quad \text{و منه :}$$

خلاصة القول : نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع نجد:

$$(\forall X, Y \in G \cup H) ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$$

. وبالتالي : $G \cup H$ زمرة جزئية من (E, \times) .

التمرين الرابع : (9,5 ن)

Ⓐ ① ■

$$g_n(x) = x + e^{-nx} \quad \text{لدينا :}$$

. إذن g_n قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} .

لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R} .

$$g'_n(x) = 1 - ne^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n) \quad \text{ولدينا :}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-nx} > 0$ بما أن :

فإن إشارة $(e^{nx} - n)$ متعلقة فقط بإشارة $g'_n(x)$

$$g'_n(x) = 0 \quad \text{إذا كان } x = \frac{\ln n}{n} \quad \text{فإن :}$$

إذا كان $x > \frac{\ln n}{n}$ فإن $g'_n(x) > 0$ يعني g_n تزايدية

إذا كان $x < \frac{\ln n}{n}$ فإن $g'_n(x) < 0$ يعني g_n تناسبية

Ⓑ ① ■

لدينا الدالة g_n متصلة على \mathbb{R} .

. $[-\infty, \frac{\ln n}{n}]$ و تناسبية على

$[\frac{\ln n}{n}, +\infty]$ و تزايدية على

و تتعدم في $\frac{\ln n}{n}$

إذن g_n تقبل قيمة دنوية عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذه القيمة هي

$$g_n(u_n) = \frac{1+\ln n}{n}$$

$$A^m \times B^n \in G \cup H \quad \text{إذن :}$$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$

$$\begin{aligned} A^m \times B^n &= (A \times B)^m \times B^{n-m} \\ &= I \times B^{n-m} \\ &= B^{n-m} \in H \subset G \cup H \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

$$A^m \times B^n \in G \cup H \quad \text{إذن :}$$

$$(\#) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H \quad \text{و بالتالي :}$$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال (ج) :

من الواضح أن $G \cup H$ جزء غير فارغ من E لأن : $(G, H) \subset E^2$

لتكن X و Y مصفوقتين من $G \cup H$ و نفصل بين أربع حالات أساسية :

الحالة الأولى : إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$

$$\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = A^n \text{ و } Y = A^m \quad \text{إذن :}$$

$$X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1} \quad \text{و منه :}$$

$$X \times Y^{-1} = A^n \times B^m \quad \text{أي :}$$

إذن : $A^n \times B^m \in G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (♯).

$$X \times Y^{-1} \in G \cup H \quad \text{و منه :}$$

الحالة الثانية : إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$

$$\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = B^n \text{ و } Y = B^m \quad \text{إذن :}$$

$$X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1} \quad \text{و منه :}$$

$$X \times Y^{-1} = B^n \times A^m \quad \text{أي :}$$

إذن : $B^n \times A^m \in G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (♯).

$$X \times Y^{-1} \in G \cup H \quad \text{و منه :}$$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \in G$ و $Y \in G$

$$\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = A^n \text{ و } Y = B^m \quad \text{إذن :}$$

$$X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1} \quad \text{و منه :}$$

$$X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \in G \subset G \cup H \quad \text{أي :}$$

$$X \times Y^{-1} \in G \cup H \quad \text{و منه :}$$

بما أن : $g_1(x) - g_2(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ فإن إشارة الفرق $(x + e^{-nx})$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - e^{-nx})$ ونفصل هنا بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 0$

فإن : $g_1(0) = g_2(0) = 0$ و منه $(1 - e^{-0}) = 1$

إذن : (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) يتقاطعان في النقطة $(0,1)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x > 0$

فإن : $g_1(x) > g_2(x) > 1 - e^{-x}$ و منه $(1 - e^{-x}) < 0$

إذن : (\mathcal{C}_1) يوجد فوق (\mathcal{C}_2)

الحالة الثالثة : إذا كان $x < 0$

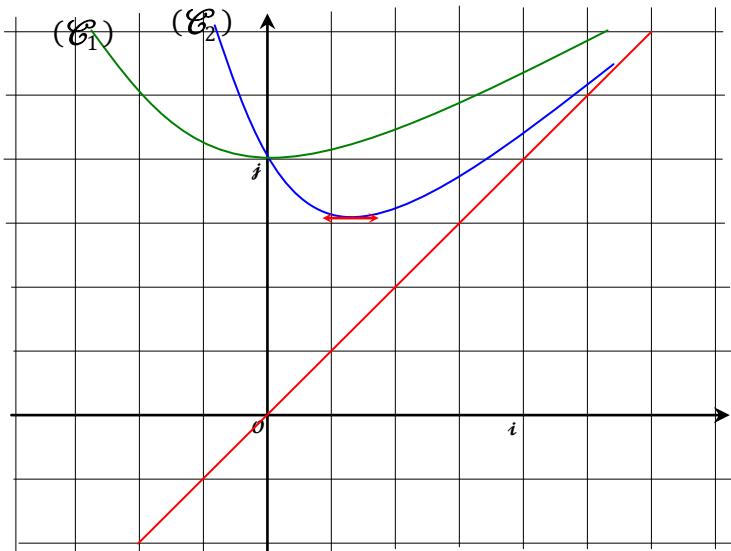
فإن : $g_1(x) < g_2(x) < 1 - e^{-x}$ و منه $(1 - e^{-x}) > 0$

إذن : (\mathcal{C}_1) يوجد أسفل (\mathcal{C}_2)

خلاصة :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	-	0	+
الوضع النسبي (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2)	(\mathcal{C}_2) فوق (\mathcal{C}_1)	(\mathcal{C}_2) و (\mathcal{C}_1) يتقاطعان في $(0,1)$	(\mathcal{C}_1) فوق (\mathcal{C}_2)

• ③ ■



• ④ ■

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \frac{t}{u} \frac{e^{-2t}}{v'} dt \\ \Leftrightarrow I(x) &= \left[\frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2t} dt \\ \Leftrightarrow I(x) &= \left[\frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2t}}{2} \right]_0^x \\ \Leftrightarrow I(x) &= \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

(ج) ② ■

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (-\infty) \left(1 + \frac{n}{0^-} \right) \\ &= (-\infty)(-\infty) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (+\infty) \left(1 + \frac{n}{(+\infty)} \right) \\ &= (+\infty)(1) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

(ب) ② ■

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$: لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= \left(1 + \frac{n}{+\infty} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$

إذن المنصف الأول للمعلم $y = x$ مقارب مائل لـ (\mathcal{C}_n) بجوار $(+\infty)$

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) = (-\infty)$$

إذن : (\mathcal{C}_n) يقبل فرعاً شلجمياً في اتجاه محور الأراتيب.

• ③ ■

لدراسة الوضع النسبي للمنحنين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) ندرس إشارة الفرق :

$$\begin{aligned} g_1(x) - g_2(x) &= (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x}) \\ &= e^{-x} - e^{-2x} \\ &= e^{-x}(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

(II) ■

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة : f_n

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على \mathbb{R}

إذن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

و بما أن : 0 عدد حقيقي فإنه يقبل سابقا واحدا α_n بال مقابل

$\exists! \alpha_n \in \mathbb{R} ; f_n(\alpha_n) = 0$: بتعبير آخر :

أ) (III) ■

بما أن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

فإن f_n تقابل من أي مجال I من \mathbb{R} نحو صورته

: $n = 1 ; \frac{-1}{2} \left[-\ln 2 ; \frac{1}{2} \right]$ و نقول من أجل

$\left] \frac{1}{2} - \ln 2 ; \frac{-1}{2} + e^{\frac{-1}{2}} \right[$ نحو صورته f_1 تقابل من

و باستعمال القيم المقربة نحصل على :

$\left] -0,2 ; 0,1 \right[$ نحو f_1 تقابل من

و بما أن $0 \in \left] -0,2 ; 0,1 \right[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_1 من

$\exists! \alpha_1 \in \left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[; f_1(\alpha_1) = 0$ يعني :

ب) (III) ■

لدينا $f_1(\alpha_1) = 0$ إذن : $\alpha_1 + e^{\alpha_1} = 0$ و منه :

الحالة الأولى : إذا كان $x > \alpha_1$

فإن : $e^x > e^{\alpha_1}$ و منه $x > \alpha_1$:

يعني : $(e^x + \alpha_1) > 0$ إذن : $e^x > -\alpha_1$

الحالة الثانية : إذا كان $x < \alpha_1$

فإن : $e^x < e^{\alpha_1}$ و منه $x < \alpha_1$

يعني : $(e^x + \alpha_1) < 0$ إذن : $e^x < -\alpha_1$

نستنتج من هاتين الحالتين أن الكميتيين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لها نفس الإشارة .

أ) (IV) ■

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x \quad \text{لدينا :}$$

$$\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{إذن :}$$

$x \leq \frac{-1}{2}$ من أجل :

$$e^x \leq e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{لدينا :}$$

$$e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\forall x \in \left] -\infty ; \frac{-1}{2} \right[; \varphi'(x) \leq 0 \quad \text{أي :}$$

و بالتالي φ دالة تناظرية على المجال $\left] -\infty ; \frac{-1}{2} \right[$

$$\Leftrightarrow I(x) = \frac{-e^{-2x}}{4} (2x + 1 - e^{2x})$$

ب) (4) ■

لدينا : $\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن h_2 متصلة على المجال : $[0; \ln 2]$

$\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) > 0$ و

إذن حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المباني لـ h_2

حول محور الأفاسيل هو :

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (h_2(x))^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x + e^{-2x})^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2xe^{-2x}) dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4} \right]_0^{\ln 2} + 2I(\ln 2) \right)$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right)$$

5 ■

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) ب :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad v_n = g_n(u_n) = \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right) = 0$$

إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتان مقابستان و تؤولان معا إلى الصفر.

أ) (II) ■

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$

$$f_n'(x) = 1 + ne^{nx} > 0 \quad \text{إذن}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
f_n	$-\infty$	$+\infty$

•(4)(II)■

لدينا حسب نتيجة السؤال (ب) :

$\forall x \in \left[-\infty; \frac{-1}{2} \right] ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$

إذن من أجل : $x = \beta_n$ المتنامي إلى حسب (*) نجد :

$$|e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |-e^{\beta_n} - \alpha_1| = |e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \quad (777)$$

$(\exists a = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}) |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$ وبالتالي :

لدينا باستعمال النتيجة (777)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |\beta_n - \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1| \\ &\vdots \quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1| \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right| \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$$

بما أن $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$ فإن :

$$(1111) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \quad \text{و منه :}$$

نلاحظ أن : $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متالية هندسية أساسها العدد الموجب

$\frac{1}{\sqrt{e}}$ والأصغر من 1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{إذن :}$$

و منه حسب التأطير (1111) نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n - \alpha_1| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \alpha_1 \quad \text{أي :}$$

•(5)(II)■

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

من أجل : $n = 0$ لدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

افتراض أن : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{\frac{-1}{2}}$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{\frac{-1}{2}}$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد :

$$\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$

و وبالتالي حسب مبدأ الترجمة :

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق :

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب)