



التمرين الأول : (2,5 ن)

$x \wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

$$(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y \quad . \quad (1)$$

ليكن (x, y) حلًا للمعادلة (E). ن 0,50

بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$. .

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E). ن 0,50

بين أن : $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (K - 3) \wedge 8$ ن 0,75

$$\begin{cases} 121^{(x)} = 59^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} \quad . \quad (3)$$

حل في \mathbb{N}^2 النظمة التالية : ن 0,75

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعدد منظم $(\vec{v}, \vec{u}, \mathcal{O})$ نعتبر المنحني (\mathcal{C}_m) الذي معادلته هي :

$$\frac{x^2}{(10-m)} + \frac{y^2}{(2-m)} = 1 ; m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 10\}$$

(I) نقش حسب قيم m طبيعة المنحني (\mathcal{C}_m) . ن 1,00

(2) إذا كان (\mathcal{C}_m) مخروطيا ، اعط عناصره المميزة (المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا) ن 1,00

(3) أرسم (\mathcal{C}_1) . ن 0,25

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + 1 + 8 \cos^2 \alpha = 0$$

حل في \mathbb{C} المعادلة (E). ن 0,50

ليكن z_1 و z_2 حلّي المعادلة (E) ; M_1 و M_2 النقطتان ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي.

(2) تحقق أن : $M_1 \in (\mathcal{C}_1)$. ن 0,25

(3) بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من (\mathcal{C}_1) حيث يكون فيهما المماس للمنحني (\mathcal{C}_1) موازياً لمستقيم (OM_1) . ن 0,75

(ج) تتحقق أن : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$. ن 0,75

التمرين الثالث : (2,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n - 10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرّة . نسمى p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \leq k \leq n)$.

أ أحسب p_k بدلالة n و k . **ن 0,50**

$$\text{نضع : } u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad \text{حيث : } k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} \quad \text{و} \quad \text{ن 0,50}$$

$$u_k = \frac{(n-k)}{(k+1)} \times \frac{10}{(n-10)} \quad \text{أ بین ان : } \text{ن 0,50}$$

$$10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1 \quad \text{ب بین ان : } \text{ن 0,50}$$

ج استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0, 1, \dots, n\}$. **ن 1,00**

$$M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!} \quad \text{و بین ان : }$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

ليكن (\mathcal{C}) منحناها في معلم متعمد منظم $(0, \vec{J})$.

أ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. **ن 0,50**

ب أدرس الفروع اللاحنيّة للمنحنى (\mathcal{C}) . **ن 0,50**

ج أدرس تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . **ن 0,50**

د أدرس تعرّف المنحنى (\mathcal{C}) . **ن 0,50**

هـ أنشئ (\mathcal{C}) . **ن 0,50**

أ بین ان f حل للمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$. **ن 0,50**

ب حدد الحل العام للمعادلة (E) . **ن 0,50**

(II) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ A_n لمساحة الحيز المحصور بين (٤) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.

أحسب A_n بدلاة n . 1,00 ن

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$: أحسب 0,50 ن

$$u_n = \int_0^n [f(x)]^n dx \quad : \text{لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : } \quad \text{(III)}$$

① باستعمال تقنية تغيير المتغير ($xn = t$) بين أن : 0,75 ن

$(\forall r \in [1; 2]) ; 2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$: بين أن : 0,50 ن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in [0; n]) ; x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$: استنتج 0,75 ن

② $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$: بين أن : 0,50 ن

③ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} dx \leq u_n$: بين أن : 0,75 ن

④ استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0,75 ن

ليكن a عنصرا من المجال $]0,1]$. 4

⑤ بين أن : $\int_a^1 n [f(x)]^n dx \leq n(1-a)[f(a)]^n$ 0,50 ن

⑥ استنتاج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 n [f(x)]^n dx = 0$ 0,50 ن

⑦ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n n [f(x)]^n dx$ 0,50 ن

التمرين الأول : (2,5 ن)

① ② ■

ليكن (x, y) حل للمعادلة (E) .

$$(x+1)^2 = 9 + 5y \quad \text{هذا يعني أن :}$$

$$5/(x+4)(x-2) \quad \text{أي :} \quad 5/(x+1)^2 \quad \text{و منه :} \quad 9 - 5/(x+1)^2 \quad \text{و بما أن 5 عدد أولي :}$$

$$5/(x+4) \quad \text{أو} \quad 5/(x-2) \quad \text{فإن :}$$

$$5/(x+4) - 5 \quad \text{أو} \quad 5/(x-2) \quad \text{و منه :}$$

$$x \equiv 1[5] \quad \text{أو} \quad x \equiv 2[5] \quad \text{يعني :}$$

③ ④ ■

$$\text{إذا كان : } x \equiv 1[5] \quad \text{فإن :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad x - 1 = 5k \quad \text{و منه :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad x = 5k + 1 \quad \text{يعني :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad (5k + 1 + 1)^2 = 9 + 5y \quad \text{و منه حسب المعادلة (E) :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad 25k^2 + 4 + 20k = 9 + 5y \quad \text{يعني :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad y = 5k^2 + 4k - 1 \quad \text{و منه :}$$

$$\text{إذا كان } [5] \quad \text{فإن : } x \equiv 2[5]$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad x - 2 = 5k \quad \text{يعني :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad x = 5k + 2 \quad \text{أي :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad (5k + 3)^2 = 9 + 5y \quad \text{و منه حسب المعادلة (E) :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad 25k^2 + 9 + 30k = 9 + 5y \quad \text{يعني :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; \quad y = 5k^2 + 6k \quad \text{إذن :}$$

و بالتالي : 5 مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{ (5k + 1 ; 5k^2 + 4k - 1) ; (5k + 2 ; 5k^2 + 6k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

② ■

أذكر في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|cc} a & b \\ \hline c & d \end{array} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$$

$$\begin{array}{c|cc} 5k^2 + 4k - 1 & 5k + 1 \\ \hline 3k - 1 & k \end{array} \quad \text{لدينا :}$$

إذن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (5k + 1) \wedge (3k - 1) \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|cc} 5k + 1 & 3k - 1 \\ \hline 2k + 2 & 1 \end{array} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

إذن :

$$(2) \quad (5k + 1) \wedge (3k - 1) = (3k - 1) \wedge (2k + 2)$$

$$\begin{array}{c|cc} 3k - 1 & 2k + 2 \\ \hline k - 3 & 1 \end{array}$$

و لدينا كذلك :

$$(3) \quad (3k - 1) \wedge (2k + 2) = (2k + 2) \wedge (k - 3) \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{c|cc} 2k + 2 & k - 3 \\ \hline 8 & 2 \end{array}$$

و لدينا كذلك :

$$(4) \quad (2k + 2) \wedge (k - 3) = (k - 3) \wedge 8 \quad \text{إذن :}$$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$$

لحل النظمة التالية :

$$\left\{ \begin{array}{l} 121^{(x)} = 59^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 = 9 + 5y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{array} \right.$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن (x, y) حل للمعادلة (E) و $x \equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال ④ :

$$x = 5k + 1 \quad \text{و} \quad y = 5k^2 + 4k - 1$$

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = 8 \quad x \wedge y = 8 \quad \text{إذن :}$$

$$(k - 3) \wedge 8 = 8 \quad \text{و منه حسب السؤال ② :}$$

إذن : 8 تقسم العدد $(k - 3)$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; \quad k - 3 = 8n$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; \quad k = 8n + 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (5k + 1) = 40n + 16 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 = 320n^2 + 272n + 56 \end{array} \right. \quad \text{و بالتالي :}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة هي :

$$\mathcal{S}' = \{ (40n + 16 ; 320n^2 + 272n + 56) / n \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

①(I) ■

إذا كان : $10 - m > 0$ و $2 - m > 0$

يعني : $m < 10$ و $m < 2$

$$(\mathcal{C}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10 - m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2 - m})^2} = 1 \quad \text{فإن :}$$

و منه : (\mathcal{C}_m) إهليج.

إذا كان : $2 < m < 10$

فإن : $m - 2 > 0$ و $10 - m > 0$

$$(\mathcal{C}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10 - m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m - 2})^2} = 1 \quad \text{و منه :}$$

إذن : (\mathcal{C}_m) هذلول.

① (II) ■

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$(E) ; z^2 - (6\cos\alpha)z + (1 + 8\cos^2\alpha) = 0$$

$$\Delta = (6\cos\alpha)^2 - 4(1 + 8\cos^2\alpha) = (2i\sin\alpha)^2 \quad \text{لدينا :}$$

و منه (E) تقبل حلين عقديين متراافقين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha + i\sin\alpha \\ z_2 = \frac{6\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha - i\sin\alpha \end{cases}$$

————— ① ② (II) ■

نضع : $M_2(z_2)$ و $M_1(z_1)$

$$\frac{9\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{و منه : } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{(3\cos\alpha)^2}{3^2} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{أي :}$$

إذن الزوج $(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$ يحقق معادلة الإهليج (\mathcal{C}_1)

و منه : $M_1 \in (\mathcal{C}_1)$

————— ③ (II) ■

لتكن $P(x_0; y_0)$ نقطة من الإهليج (\mathcal{C}_1)

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليج (\mathcal{C}_1) في P هي :

$$(T) : \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = \left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x + 1$$

لدينا : $M_1(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$ إذن : M_1 هي صورة z_1

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) تكتب على شكل :

$$(OM_1) : y = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

نطافق من الكتابة : $(T) \parallel (OM_1)$

$$\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right) = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right) \quad \text{هذا يعني أن لهما نفس الميل أي :}$$

$$(*) \quad x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \quad \text{و منه :}$$

$P(x_0; y_0) \in (\mathcal{C}_1)$. . .

$$\frac{x_0^2}{3^2} + \frac{y_0^2}{1^2} = 1 \quad \text{فإن :}$$

إذا كان : $m > 10$ فإن : $m > 10$ و $m - 2 > 0$

$$(\mathcal{C}_m) : -\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1 \quad \text{و منه :}$$

نلاحظ أن $\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)$ الكمية \emptyset موجبة إذن :

————— ② (I) ■
 $m < 10$ يعني $m < 2$ في الحالة

$$(\mathcal{C}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}\right) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

و منه : $O(0,0)$ إهليج مركزه

$B(-\sqrt{10-m}, 0)$ و $A(\sqrt{10-m}, 0)$: رؤوسه

$A(0, -\sqrt{2-m})$ و $A'(0, \sqrt{2-m})$:

$b = \sqrt{2-m}$ و $a = \sqrt{10-m}$: نضع

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(2-m) - (10-m)} = 2\sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

و منه : بورتا الإهليج (\mathcal{C}_m) هما : $F'(-2\sqrt{2}, 0)$ و $F(2\sqrt{2}, 0)$

————— ② في الحالة : ■

$$(\mathcal{C}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

و منه : $O(0,0)$ هنول مركزه \mathcal{C}_m

$A'(-\sqrt{10-m}, 0)$ و $A(\sqrt{10-m}, 0)$: رأساه هما :

$b = \sqrt{m-2}$ و $a = \sqrt{10-m}$: نضع

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(m-2) + (10-m)} = 2\sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

و منه : بورتا الهنول (\mathcal{C}_m) هما :

ولدينا كذلك : (\mathcal{C}_m) يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

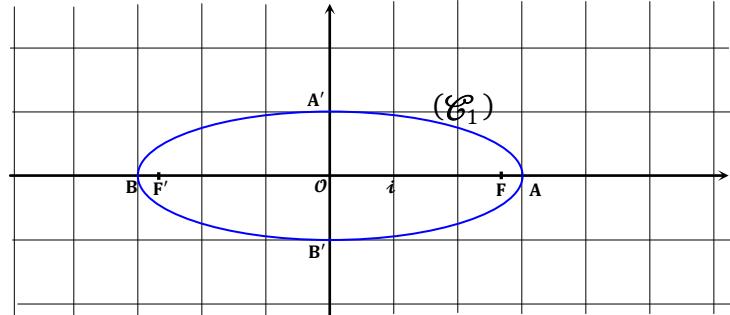
$$\begin{cases} (\Delta) : y = \frac{b}{a}x \\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) : y = \left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \\ (\Delta') : y = -\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \end{cases}$$

————— ③ (I) ■
لدينا حسب ما سبق (\mathcal{C}_1) إهليج مركزه

و رؤوسه : $B'(0, -1)$ و $A'(0, 1)$ و $A(3, 0)$ و $B(-3, 0)$

و بورتا هما :

$F'(-\sqrt{8}, 0)$ و $F(\sqrt{8}, 0)$



التمرين الثالث : (25 ن)

(1) ■

تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .

عند إعادة التجربة E n مرّة متتالية فإن احتمال الحصول على

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

في هذا التمرين : الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء.

$$p(A) = \frac{10}{n}$$

نكر التجربة n مرّة.

إذن احتمال الحصول على الحدث A k مرّة هو احتمال الحصول على k كرة

$$p_k = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$$

$$p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على السؤال بالقصد تمام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة

الحساب الحرفى لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

(1) (2) ■

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$$

نضع :

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$$

لدينا :

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} \times \frac{k! (n-k)!}{n!} = \binom{n-k}{k+1}$$

$$u_k = \left(\frac{n-k}{k+1}\right) \times \left(\frac{10}{n-10}\right)$$

(2) (2) ■

$$u_k \geq 1$$

لدينا حسب المعطيات 0

يكفي إذن أن نبرهن على أن : 9

$$u_k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n-k}{k+1}\right) \times \left(\frac{10}{n-10}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \geq 1$$

بما أن : $n \geq k$ فإن :

و منه العددان : $(n-10)(k+1)$ و $(1+10)(n-k)$ موجبان.

نفرض x_0 بقيمة حسب (*) في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9} \left(-3y_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + y_0^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm \cos \alpha$$

$$\text{إذا كان } x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = -3 \sin \alpha \quad \text{فإن } y_0 = \cos \alpha$$

$$\text{إذا كان } x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = 3 \sin \alpha \quad \text{فإن } y_0 = -\cos \alpha$$

و بالتالي : توجد نقطتان $\begin{cases} P_1(3 \sin \alpha ; -\cos \alpha) \\ P_2(-3 \sin \alpha ; \cos \alpha) \end{cases}$

من الإهليلج (\mathcal{C}_1) : حيث المماس لـ (\mathcal{C}_1) في كل منهما يوازي (OM_1)

(ج) (2) (II) ■

لدينا : $P_1(3 \sin \alpha - i \cos \alpha)$ و $M_1(z_1)$

و $P_2(-3 \sin \alpha + i \cos \alpha)$

$$\begin{aligned} OM_1^2 + OP_1^2 &= |z_1|^2 + |3 \sin \alpha - i \cos \alpha|^2 \\ &= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 10 \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$OM_2^2 + OP_2^2 = |z_2|^2 + |-3 \sin \alpha + i \cos \alpha|^2$$

$$= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 10$$

و بالتالي : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

ج ① (I) ■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = 0$$

ج ② (I) ■

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ حسب السؤال ج

إذن : (ج) يقبل مقارباً أفقياً بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال ج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-2x} = 0$ لدينا :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-2x} = +\infty$ و :

إذن : (ج) يقبل فرعاً شلجمياً بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراثيب

ج ② (I) ■

لدينا : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}

و منه : $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$$

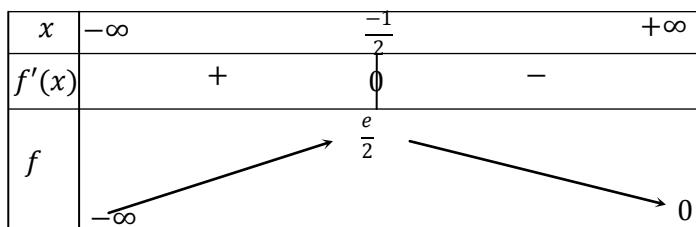
بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-2x} > 0$

. فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1+2x)$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{e}{2} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :



$$\Leftrightarrow 10(n-k) \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 10n - 10k \geq nk + n - 10k - 10$$

$$\Leftrightarrow 10n - n + 10 \geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9 + \frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9$$

و بالتالي : $0 \leq k \leq 9$

الشطر الثاني من السؤال :

نطلق من : $10 \leq k \leq (n-1)$

(1) $10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10)$ يعني :

و لدينا كذلك : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $11(n-10) \leq (n-10)(K+1) \leq 10(n-1)$

(2) $\frac{1}{n(n-10)} \leq \frac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{1}{11(n-10)}$ و منه :

ضرب التأطيرين (1) و (2) طرفاً بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

$$\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10}{11} \quad \text{و منه :}$$

$u_k \leq 1$ أي

ج ② ■

لدينا من أجل : $0 \leq k \leq 9$

$p_{k+1} \geq p_k$ يعني :

و منه المتالية $(p_k)_k$ تزايدية .

و لدينا كذلك : من أجل : $10 \leq k \leq n-1$

$p_{k+1} \leq p_k$ يعني :

و منه المتالية $(p_k)_k$ تناسبية .

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتالية هي : p_{10}

$$M = p_{10} = C_n^{10} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{10} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10! (n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}$$

٤(١) ب

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل :
 بحيث y_p هو حل خاص للمعادلة (E) (نأخذه يساوي f)
 (E_H) ; $y'' + 3y' + 2y = 0$ و y_H هو حل المعادلة التفاضلية :
 $r^2 + 3r + 2 = 0$ ولحلها نحل أولاً معادلتها المميزة :
 و التي تقبل حلين حقيقيين $-1 = r_1$ و $-2 = r_2$ وذلك بعد حساب
 المميز $\Delta = 1$
 $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$ / $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ إذن :

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يكتب على الشكل :
 $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$
 بحيث : α و β عددين حقيقيين .

١(II) ب

يشير التكامل هندسياً إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

$$A_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x} dx \quad \text{إذن :}$$

نضع $u'(x) = 1+x$ $u(x) = 1+x$ و منه :

$$v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x} \quad v'(x) = e^{-2x} \quad \text{ثم نضع و منه :}$$

باستعمال متكاملة بالأجزاء نحصل على :

$$\Leftrightarrow A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \int_0^n e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left(\frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left(\frac{-3-2n}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{-e^{-2n}}{4} (2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}$$

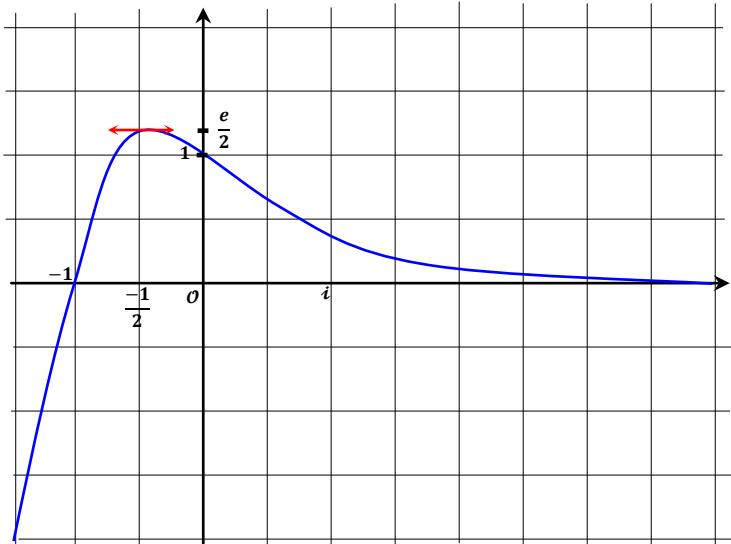
٣(١) ب

لدينا : $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$
 إذن : $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$
 $\Leftrightarrow f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$
 $\Leftrightarrow f''(x) = 4xe^{-2x}$
 إذا كان : $x = 0$ فإن : $f''(x) = 0$
 إذا كان : $x > 0$ فإن : $f''(x) > 0$
 إذا كان : $x < 0$ فإن : $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
(C)	(C) مُقعر	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	(C) مُحدب

٣(١) ب



٤(١) ب

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) &= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x} \\ &= (4x-3-6x+2+2x)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} \end{aligned}$$

إذن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : (E)

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \int (1-t) dt \leq \int \left(\frac{1}{t+1} \right) dt \leq \int 1 dt \\
&\Leftrightarrow t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t \\
&\text{نعرض } t \text{ بالقيمة } \frac{x}{n} \text{ نحصل على :} \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}
\end{aligned}$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب الغير المنعدم n نحصل على :

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

الآن (3)(III) ■

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال (ب)

$$(\forall x \in [0, n]) , (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq x \quad \text{و منه :}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \quad \text{و منه :}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب e^{-2x} نجد :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx \quad (*)$$

الآن (3)(III) ■

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال (ب)

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow e^{(x - \frac{x^2}{2n})} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+3)e^{-2n} = \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2n+3}} e^3 \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} = 0 \quad \text{لدينا} \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{و منه} \\
&\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4}} \quad \text{و بالتالي :}
\end{aligned}$$

الآن (1)(III) ■

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = n \int_0^1 [f(x)]^n dx \quad \text{نضع :}$$

$dt = ndx$ و منه : $t = nx$

إذا كان $x = 0$ فإن $t = 0$

إذا كان $x = 1$ فإن $t = n$

$$u_n = n \int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \frac{dt}{n} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n}{n} \int_0^n \left(\left(1 + \frac{t}{n}\right) e^{-\frac{2t}{n}}\right)^n dt$$

$$\Leftrightarrow u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$$

الآن (2)(III) ■

ليكن : $1 \leq u \leq 2$ يعني : $u \in [1, 2]$

$$(1) \boxed{\frac{1}{u} \leq 1} \quad \text{إذن : } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall u \in [1, 2]) ; (u-1)^2 \geq 0 \quad \text{و نعلم أن :}$$

إذن : $u^2 - 2u + 1 \geq 0$

و منه : $u^2 + 1 \geq 2u$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم $\frac{1}{u}$ نحصل على :

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2$$

$$(2) \boxed{\frac{1}{u} \geq 2 - u} \quad \text{أي : } u + \frac{1}{u} \geq 2 \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall u \in [1, 2]) ; 2 - u \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن :}$$

الآن (2)(III) ■

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in [0, n]$

يعني : $0 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \quad 0 \leq x \leq n$

نضع : $0 \leq t \leq 1$ إذن : $t = \frac{x}{n}$

أي : $1 \leq t + 1 \leq 2$

إذن حسب السؤال (أ)

$$2 - (t + 1) \leq \frac{1}{t + 1} \leq 1$$

© ③ (III) ■

من (*) و (**) و نستنتج أن :

$$(\text{***}) \quad \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = -e^{-n} + 1 \quad \text{ولدينا :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx &= e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} [-e^{-x}]_0^{n^{\frac{1}{3}}} \\ &= e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\left(1 - e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right) e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq u_n \leq (1 - e^{-n}) \quad \text{وبالتالي :}$$

نحسب نهاية طرفي هذا التأطير بجوار ∞ + نحصل على :

$$\left(1 - e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right) e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq u_n \leq (1 - e^{-n})$$

$n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$

. وبالتالي : $(u_n)_n$ متالية متقاربة و تؤول إلى 1 .

④ (III) ■

ل يكن : $a \leq x \leq 1$ و $0 < a < 1$:

. لدينا f دالة تناصصية على المجال $[0, +\infty]$

$$f(1) \leq f(x) \leq f(a) \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n(f(x))^n \leq n(f(a))^n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \int_a^1 n(f(a))^n dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n \quad (\#)$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(x - \frac{x^2}{2n}\right)} e^{-2x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq u_n \quad (1)$$

و لدينا : $1 \leq n^2$ إذن : $1 \leq n$:

و منه : $n^{\frac{1}{3}} \leq n$ إذن : $n \leq n^3$:

$$(2) \quad \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \quad \text{يعني أن :}$$

ل يكن : $x^2 \leq n^{\frac{2}{3}}$ إذن : $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{3}}$:

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2n}{2n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow 2n^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2n}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{-x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow -x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq -x - \frac{x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} \leq u_n$$

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \quad (**)$$

إذن :

ب) ④(III) ■

لدينا : $f(1) < f(a) < f(0)$ إذن : $0 < a < 1$

أي : $\ln(f(a)) < \ln 1$ و منه $2e^{-2} < f(a) < 1$

يعني : $\ln(f(a)) < 0$

و لدينا :
↓

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)e^{n \ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(a)) e^{n \ln(f(a))} \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=n \ln(f(a))}} (me^m) \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= 0 \times \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) = 0$$

إذن حسب التأطير (#)

$$\Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{\int_a^1 n(f(x))^n dx}_{n \rightarrow \infty} \leq \underbrace{n(1-a)(f(a))^n}_{n \rightarrow \infty}$$

0

0

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0} : \text{ وبالتالي}$$

ج) ④(III) ■

لدينا حسب نتيجة السؤال ③

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 n(f(x))^n dx \right) = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx + \int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 1 \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0 \quad \text{لدينا حسب نتيجة السؤال ④}$$

إذن :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx \right) = 1 ; (\forall a \in]0,1[)}$$

■ والحمد لله رب العالمين ■