

التمرين الأول : (4,5 ن) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

① بين أن G جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25 ن

② بين أن $(G, \times)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟ 0,75 ن

③ لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بين أن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(G, \times)$. 0,50 ن

④ ليكن A عنصرا من G حيث : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 0,50 ن

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث : $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعروف بما يلي :

$$(a,b) \top (x,y) = (a + bx, by) : \forall (x,y); (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعروف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي : $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \varphi(M_{(a,b)}) = (a,b)$

① بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$. 0,75 ن

② استنتج بنية المجموعة : $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$. 0,25 ن

③ حدد مماثل : $(a,1) \top (a,1) \top \dots \top (a,1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. 0,50 ن

n مرة

التمرين الثاني : (2,5 ن) نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة : $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

أ) تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$. 0,25 ن

ب) استنتج أن $b = 1$.

ج) بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$.

د) استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$.

② حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . 0,50 ن

التمرين الثالث : (5,0 ن)

نضع $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M ذات اللق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن

② بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتى مقاربيه في $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1,00 ن

③ تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{H})$ ثم أكتب في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathcal{H})$ في O .

0,50 ن

④ أنشئ $(\mathcal{H})$ في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

0,75 ن

①(II) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

0,50 ن

② نضع $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

أ) تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$.

0,50 ن

ب) حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω .

0,75 ن

ج) استنتج أن : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

0,50 ن

الجزء الأول في هذا الجزء : $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

التمرين الرابع : (9,0 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

① ضع جدول تغيرات الدالة g_n .

0,50 ن

② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) , \sqrt{x} > \ln x$.

0,50 ن

③ أ) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$. و أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

0,75 ن

ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0,25 ن

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$

ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm})$.

① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة O ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,50 ن

② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

0,50 ن

③ أ) بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ (*)

0,25 ن

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,25 ن

④ أنشئ $(\mathcal{C})$ نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$

0,50 ن

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

① ① بين أن : $f(I) = I$. 0,50 ن

② ② باستعمال العلاقة (*), بين أن : $(\forall x \in I), |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ 0,50 ن

③ ③ بين أن : $[f(x) = x \text{ و } x > 0] \Leftrightarrow x = \alpha_3$ 0,50 ن

حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.

④ ② لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

① ① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$ 0,25 ن

② ② بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$ 0,25 ن

③ ③ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 0,25 ن

④ ④ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ مقاربة محددا نهايتها . 0,50 ن

(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$

① ① بين أن : F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$. 0,25 ن

② ② أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F . 0,75 ن

③ ② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ 0,50 ن

④ ② استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25 ن

⑤ ③ ضع جدول تغيرات الدالة F . 0,25 ن

في البداية نلاحظ أن : $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G

إن $d \neq 0$ و $b \neq 0$

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} \text{ ومنه :}$$

بما أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن $bd \neq 0$

ومنه : $(a+bc ; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

يعني : $M_{(a+bc, bd)} \in G$

و بالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

لدينا $\times$ تجميعي في $(G, \times)$

لأن جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

ولدينا كذلك $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن $I \in G$ فإن I هو نفسه العنصر المحايد لـ $\times$ في G ($I = M_{(0,1)}$)

ليكن $M_{(a,b)}$ عنصرا من G .

$M_{(a,b)}$ تقبل مائلا (أو مقلوبا) في G بالنسبة لـ $\times$

إذا فقط إذا كان : $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

$$\det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b \text{ لدينا :}$$

و بما أن : $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$

ومنه : $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

إن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و نذكرُ بالعلاقة المهمة التالية :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M_{(a,b)}} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \text{ إن :}$$

$$= \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = M_{(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b})}$$

و بما أن : $b \neq 0$ فإن : $\frac{1}{b} \neq 0$

ومنه : $M_{(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b})} \in G$ أي : $M_{(a,b)}^{-1} \in G$

إن : كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مائلا $M_{(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b})}$ في G بالنسبة لـ $\times$

نختار المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$ من G لكي نبين أن $\times$ ليس تبادليا في G

$$M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ لدينا :}$$

$$M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ و}$$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إن $\times$ ليس تبادليا في G .

خلاصة : $(G, \times)$ زمرة غير تبادلية

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $\mathcal{H} = \{M_{(a,b)} \in G \mid b > 0\}$

لدينا حسب ما سبق $I = M_{(0,1)} \in G$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in \mathcal{H}$

ومنه : $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من G

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من $\mathcal{H}$

لدينا حسب ما سبق :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{-c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن : $\frac{b}{d} > 0$

ومنه :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix} = M_{((a - \frac{bc}{d}), \frac{b}{d})} \in \mathcal{H}$$

و بالتالي نستنتج أن $(\mathcal{H}, \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G, \times)$.

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$(*) \quad M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b,1)} \quad \text{لدينا :}$$

إذن باستعمال العلاقة (*) نحصل على :

$$M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \cdots \times M_{(a_n,1)} = M_{((\sum_{i=1}^n a_i),1)}$$

$$M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)} \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; (M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad \text{يعني :}$$

و إن لم تكن هذه الطريقة مقنعة بما فيه الكفاية فعليك بالترجع :

1 (II) ■

لنكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc, bd)} \quad \text{لدينا :}$$

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a+bc, bd)}) = (a+bc, bd) \quad \text{و منه :}$$

و لدينا كذلك :

$$\varphi(M_{(a,b)}) \upharpoonright \varphi(M_{(c,d)}) = (a,b) \upharpoonright (c,d) = (a+bc, bd)$$

و بالتالي :

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a,b)}) \upharpoonright \varphi(M_{(c,d)})$$

و منه φ تشاكل من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$.

ليكن (c, d) عنصرا من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d) \quad \text{لنحل المعادلة :}$$

$$(x, y) = (c, d) \quad \text{التي تكافئ :}$$

$$y = d \quad \text{و} \quad x = c$$

إذن المعادلة : $\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$ تقبل حلا وحيدا في

G و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$.

و منه G تقابل من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$.

خلاصة : تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$.

2 (II) ■

رأينا أن φ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

إذن نستنتج بنية $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$ انطلاقا من بنية $(G, \times)$ عن طريق التطبيق φ

بما أن $(G, \times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو المصفوفة $M_{(0,1)}$ و أن كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلة $M_{(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})}$ في G بالقانون $\times$.

فإن : $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\upharpoonright$ هو $\varphi(M_{(0,1)})$ و أن كل زوج (c, d) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا $(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$ في G بالقانون $\upharpoonright$.

إذن : $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \upharpoonright)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد $(0,1)$ و كل عنصر (c, d) يقبل مماثلا و هو $(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$.

3 (II) ■

• φ تشاكل .
• تعريف التطبيق φ
• باستعمال الأدوات التالية :
• $(M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)}$
• $(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$ هو مماثل (c, d) بالنسبة لـ $\upharpoonright$

$$(a, 1) \upharpoonright \cdots \upharpoonright (a, 1) = (-na, 1) \quad \text{نبرهن بكل بساطة على أن :}$$

$$[(a, 1) \upharpoonright (a, 1) \upharpoonright \cdots \upharpoonright (a, 1)]' \quad \text{لدينا :}$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)}) \upharpoonright \varphi(M_{(a,1)}) \upharpoonright \cdots \upharpoonright \varphi(M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi((M_{(a,1)})^n)]'$$

$$= [\varphi(M_{(na,1)})]'$$

$$= \left(-\frac{na}{1}; \frac{1}{1}\right)$$

$$= (-na; 1)$$

لدينا : (x, y) حل للمعادلة (E)

$$x^2(x + y) = y^2(x - y)^2 \quad \text{يعني}$$

$$(ad)^2(ad + bd) = (bd)^2(ad - bd)^2 \quad \text{يعني}$$

$$a^2d^3(a + b) = b^2d^3(a - b)^2d \quad \text{يعني}$$

$$d^3 \neq 0 \quad \text{لأن } d^3 \text{ بالعدد}$$

$$a^2(a + b) = db^2(a - b)^2 \quad \text{نحصل على}$$

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات :

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^n = 1 ; \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{الأداة الأولى:}$$

$$\begin{cases} a/bc \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a/b \quad \text{الأداة الثانية: (Gauss)}$$

$$\text{الأداة الثالثة: (Bezout)}$$

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 ; ma + nb = d$$

$$\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \Rightarrow \forall (m, n) \in \mathbb{Z} ; a/(mb + nc) \quad \text{الأداة الرابعة:}$$

ننطلق من كون (x, y) حل للمعادلة (E)

$$d = x \wedge y \quad \text{لدينا}$$

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; xu + yv = d \quad \text{إذن حسب (Bezout) المباشرة:}$$

$$adu + bdv = d \quad \text{و منه}$$

$$au + bv = 1 \quad \text{نختزل بالعدد الغير المنعدم } d \text{ نحصل على:}$$

$$a \wedge b = 1 \quad \text{و منه حسب (Bezout) العكسية:}$$

$$(*) \quad a^2 \wedge b = 1 \quad \text{إذن حسب الأداة الأولى:}$$

$$(i) \quad \text{بما أن الزوج } (x, y) \text{ حل للمعادلة } (E) \text{ فإنه حسب السؤال}$$

$$db^2(a - b)^2 = (a + b)a^2$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{نضع: } k = bd(a - b)^2 \quad \text{حيث}$$

$$b / (a + b)a^2 = kb \quad \text{و منه: } (a + b)a^2 = kb$$

$$a^2 \wedge b = 1 \quad \text{و بما أن: حسب النتيجة (*) فإنه}$$

$$b / (a + b) \quad \text{حسب (Gauss)}$$

$$\text{و نعلم أن } b / (-b) \quad \text{إذن حسب الأداة الرابعة:}$$

$$(1) \quad b / a \quad \text{يعني } b / (a + b - b)$$

$$(2) \quad a \wedge b = 1 \quad \text{و نعلم حسب ما سبق أن:}$$

$$b = 1 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

نفترض أن : $a = 1$

لدينا : $b = 1$ إذن : $x = d$ و $y = d$.

$$d^2(d + d) = d^2(d - d)^2 \quad \text{فإن } (x, y) \text{ حل للمعادلة } (E)$$

$$d = x \wedge y \neq 0 \quad \text{و هذا تناقض لأن}$$

$$a \neq 1 \quad \text{و بالتالي:}$$

$$a - (a - 1) = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$(\exists u, v \in \mathbb{Z}) ; au + (a - 1)v = 1 \quad \text{إذن:}$$

$$v = -1 \quad \text{و } u = 1 \quad \text{في هذه الحالة لدينا:}$$

$$a \wedge (a - 1) = 1 \quad \text{و منه حسب (Bezout)}$$

$$(**) \quad a^2 \wedge (a - 1) = 1 \quad \text{إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن:}$$

$$(i) \quad \text{لدينا من جهة أخرى } b = 1 \quad \text{إذن حسب السؤال}$$

$$(a + 1)a^2 = d(a - 1)^2$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{نضع: } k = d(a - 1) \quad \text{بحيث}$$

$$(a - 1) / (a + 1)a^2 = k(a - 1) \quad \text{و منه: } (a + 1)a^2 = k(a - 1)$$

$$(a - 1) / (a + 1) \quad \text{من العلاقة (*) نستنتج حسب (Gauss)}$$

$$a \equiv -1[a - 1] \quad \text{لدينا: } (a - 1) / (a + 1) \quad \text{يعني:}$$

$$(a - 1) / (a - 1) \quad \text{و نعلم أن: } (a \equiv 1[a - 1]) \quad \text{(لأن)}$$

$$2 \equiv 0[a - 1] \quad \text{إذن: } 1 \equiv -1[a - 1] \quad \text{يعني:}$$

$$(a - 1) / 2 \quad \text{و منه:}$$

$$\text{القواسم الصحيحة الطبيعية لـ } 2 \text{ هي: } 1 \text{ و } 2$$

$$a - 1 = 2 \quad \text{أو } a - 1 = 1 \quad \text{إذن:}$$

$$a = 3 \quad \text{أو } a = 2 \quad \text{يعني:}$$

$$\text{و نبرهن بكل بساطة على أنه:}$$

$$\text{إذا كان: } a = 2 \quad \text{فإن: } (x, y) \text{ يحقق المعادلة } (E) .$$

$$\text{و إذا كان: } a = 3 \quad \text{فإن: } (x, y) \text{ يحقق كذلك المعادلة } (E) .$$

لنحل المعادلة (E)

الحالة الأولى : إذا كان : $(a, b) = (2, 1)$

إن : $(x, y) = (2d, d)$

و منه : $(E) : (2d)^2(2d + d) = d^2 d^2$

يعني : $(4d^2)(3d) = d^4$ أي : $d = 12$

و بالتالي : $(x, y) = (24, 12)$

الحالة الثانية : إذا كان : $(a, b) = (3, 1)$

إن : $(x, y) = (3d, d)$

و منه : $(E) : (3d)^2(3d + d) = d^2(2d)^2$

يعني : $36d^3 = 4d^4$ أي : $d = 9$

و بالتالي : $(x, y) = (27, 9)$

خلاصة : الزوجان $(24, 12)$ و $(27, 9)$ هما حلا المعادلة (E).

التمرين الثالث : (5,0 ن)

■ (I) ①

نضع : $z = x + iy$ و M هي صورة العدد العقدي z

بحيث : x و y عددين حقيقيين.

لدينا : $P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x + iy)^2 - (2 + 6i)(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - (2x + 2iy + 6ix - 6y)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy - 6ix + 6y$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 2y - 6x)$$

و لدينا $P(z)$ عدد تخيلي صرف.

$$\text{إذن : } \Re(P(z)) = 0$$

$$\text{يعني : } x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$$

و منه : $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ هي معادلة ديكارتية مميزة للنقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا.

■ (I) ②

في المعلم $(\mathcal{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ المجموعة $(\mathcal{H})$ تتميز بالمعادلة :

$$(x^2 - y^2 - 2x + 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = -8$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - (y - 3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y - 3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1$$

إن : $(\mathcal{H})$ هذلول مركزه النقطة $C(1, 0)$ و رأساه هما $B(1; 3 + 2\sqrt{2})$ و $\bar{B}(1; 3 - 2\sqrt{2})$ و (Δ') و (Δ) المستقيمان (المعرفين بما يلي :

$$(\Delta') : y - 3 = 1 - x \quad \text{و} \quad (\Delta) : y - 3 = x - 1$$

$$\text{يعني : } (\Delta) : y = x + 2 \quad \text{و} \quad (\Delta') : y = 4 - x$$

■ (I) ③

الزوج $(0, 0)$ يحقق معادلة المجموعة $(\mathcal{H})$.

$$\text{لأن : } 0^2 - 0^2 - 2 \times 0 + 6 \times 0 = 0 \quad \text{إذن : } \mathcal{O} \in (\mathcal{H})$$

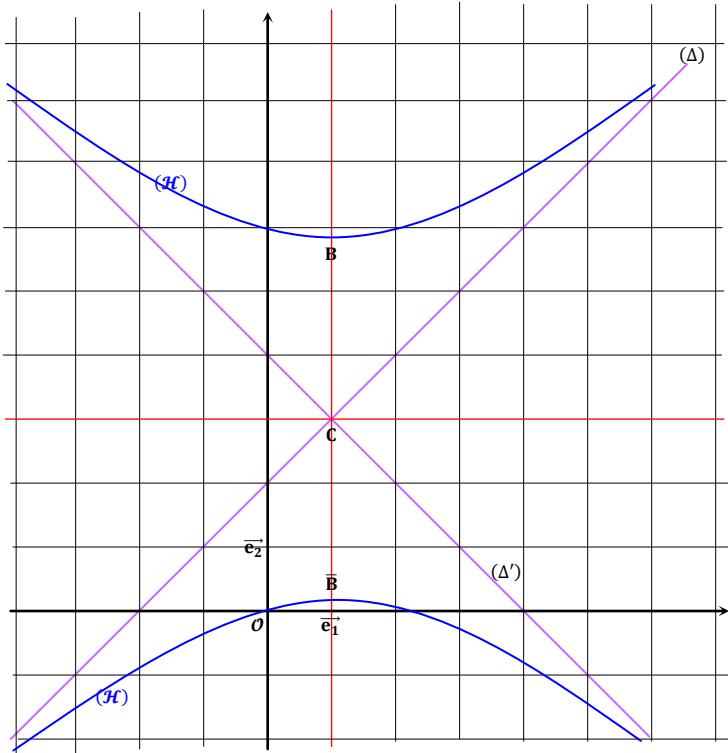
نعلم أن معادلة المماس $(T_{\mathcal{O}})$ للهذلول $(\mathcal{H})$ في النقطة $\mathcal{O}$ تكتب على الشكل :

$$(T_{\mathcal{O}}) : xx_0 - yy_0 = (x + x_0) - 3(y + y_0)$$

$$\text{حيث : } x_0 = 0 \quad \text{و} \quad y_0 = 0$$

$$\text{و منه : } (T_{\mathcal{O}}) : x - 3y = 0$$

■ (I) ④



$$\Leftrightarrow u = \frac{\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$\sin(\alpha) \approx 0,19 \neq 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\arg(u) \equiv \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \quad \text{بنفس الطريقة لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 239 = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow 239 - i = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - i$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\cos(\beta) - i\sin(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) (\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) e^{-\beta i}$$

$$\Leftrightarrow \arg(\omega) = -\beta [2\pi]$$

■ (II) 2 (ج)

$$(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{أشير في البداية إلى أن}$$

$$\Rightarrow \arg(v) = \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$u^4 \times v = \omega \quad \text{و لدينا حسب السؤال (i)}$$

$$\Rightarrow \arg(u^4 \times v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\arg(u) + \arg(v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

■ (II) 1

$$P(z) = 4 - 6i \quad \text{لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة :}$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z + (6i - 4) = 0$$

$$\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(6i - 4) \quad \text{لدينا :}$$

$$= (4i)^2$$

$$z_1 = \frac{(2 + 6i) + 4i}{2} = 1 + 5i \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = \frac{(2 + 6i) - 4i}{2} = 1 + i \quad \text{و}$$

■ (II) 2 (i)

$$\text{لدينا } u = 1 + 5i \text{ و } v = 1 + i \text{ و } \omega = 239 - i :$$

$$1 \quad \text{لدينا حسب مثلث (Pascal) :}$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \quad (a + b)^4 \text{ معاملات الحدودية :}$$

إذن :

$$u^4 = (1 + 5i)^4 = 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 1 + 20i - 150 - 500i + 625$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 476 - 480i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = (476 - 480i)(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 476 + 476i - 480i + 480$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 956 - 4i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 4(239 - i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u^4 \times v = 4\omega}$$

■ (II) 2 (ب)

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow 5 = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i \quad \Leftrightarrow \boxed{1 + 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i + 1}$$

■ (2)

نضع : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; h(x) = \sqrt{x} - \ln x$

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - \ln x\right)'$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{x - 4}{2x(\sqrt{x} + 2)}$$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{1}{2x(\sqrt{x} + 2)} > 0$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x - 4)$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$

و : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

x	0	4	$+\infty$
$h'(x)$		0	+
h	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$

انطلاقا من هذا الجدول نلاحظ أن قيمة دنوية للدالة h على $\mathbb{R}_+^*$ هي $(2 - \ln 4)$

يعني أن : $(\forall x > 0) ; h(x) > 2 - \ln 4$

لدينا : $2 - \ln 4 \approx 0,6 > 0$

إذن : $\forall x > 0 ; h(x) > 0$

و منه : $\forall x > 0 ; \sqrt{x} > \ln x$

■ (3) (i)

لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$.

إذن g_n تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]0, +\infty[$

$$g_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right[\quad \text{و لدينا :}$$

$$=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان .

لدينا : $\alpha \approx 0,2 \text{ rad}$ و $\beta \approx 0,004 \text{ rad}$

و نلاحظ أن : $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$

و من هذين التأييرين نحصل على : $-1 < 4\alpha - \beta < 4$

أي : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$

و منه : $-0,3 < k < 0,5$

إذن : $k = 0$

و بالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي :}$$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (1)

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g_n(x) = nx + 2\ln x$

g_n دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و هما $x \rightarrow nx$ و $x \rightarrow 2\ln x$.

و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx + 2}{x} > 0$

إذن g_n دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$		+
g_n	$-\infty$	$+\infty$

■ (I) ②

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x} \right)$$

$$\left| \begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} \right)} \right) \times \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{+\infty} \right) \times \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

إذن: ($\mathcal{E}$) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاسيل.

■ (I) ③ (I) ①

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x} - e^{-x} x^{\frac{1}{3}} \quad \text{إذن:}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3} x^{-1} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3x} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1-3x}{3x} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$$

■ (I) ③ (I) ②

$$f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x) \quad \text{لدينا:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0 \quad \text{بما أن:}$$

$$(\forall x > 0) ; x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln x} > 0 \quad \text{و} \quad 3x > 0$$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة بـ $(1-3x)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{فإن} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{فإن} \quad x > \frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{فإن} \quad x < \frac{1}{3}$$

و لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	0

من جهة أخرى لدينا: $\left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\subset \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n) \quad \text{و لدينا كذلك:}$$

$$1 - 2\ln(n) \leq 1 - 2\ln 3 \quad \text{علمنا أن} \quad n \geq 3 \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$1 - 2\ln(n) < 0 \quad \text{إذن:} \quad 1 - 2\ln 3 \approx -1,2 \quad \text{لدينا}$$

$$(1) \quad g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{و منه:}$$

و لدينا كذلك:

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sqrt{n} - \ln(n) \end{aligned}$$

$$\sqrt{n} > \ln(n) \quad \text{بما أن} \quad n > 0 \quad \text{فإنه حسب السؤال ②}$$

$$(2) \quad g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 \quad \text{و منه:} \quad \sqrt{n} - \ln(n) > 0 \quad \text{يعني}$$

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة لتطبيق مبرهنة القيم الوسيطة.

$$\exists ! \alpha_n \in \left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\quad / \quad g_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

و منه: المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

■ (I) ③ (I) ②

$$\begin{cases} \frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

الجزء الثاني

■ (I) ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x} e^{-x}}{x} \right) \quad \text{لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}} e^x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

نستنتج أن ($\mathcal{E}$) يقبل مماسا رأسي موجهها نحو الأعلى في الصفر.

لدينا : $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ أي : $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $x > \frac{1}{5}$ يعني : $5x > 1$

يعني : $3x + 2x > 1$

يعني : $2x > 1 - 3x$

يعني : $2 > \frac{1 - 3x}{x}$ (*)

ولدينا : $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ أي : $x \leq 1$

ومنه : $1 - x \geq 0$ يعني : $1 - 3x + 2x \geq 0$

يعني : $1 - 3x \geq -2x$

يعني : $\frac{1 - 3x}{x} \geq -2$ (**)

من (*) و (**) نستنتج أن : $-2 \leq \frac{1 - 3x}{x} < 2$

أي : $\left|\frac{1 - 3x}{x}\right| \leq 2$ (2)

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3x}{x}\right) f(x)$

$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{3} \left|\frac{1 - 3x}{x}\right| |f(x)|$

من (1) و (2) نجد : $|f(x)| < 1$ و $\left|\frac{1 - 3x}{x}\right| \leq 2$

ومنه : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

■ (II) 1 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً

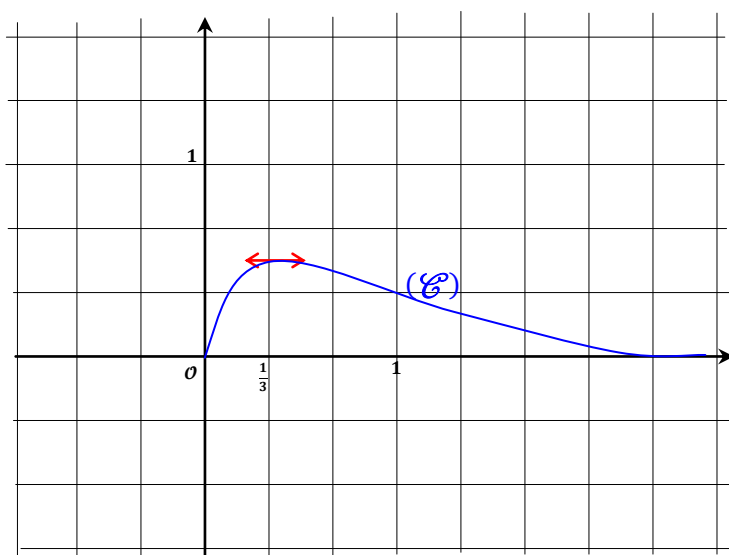
لدينا : $f(x) = x$ يعني : $\sqrt[3]{xe^{-x}} = x$

إن : $xe^{-3x} = x^3$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على : $e^{-3x} = x^2$

ندخل الدالة $\ln$ على هاتين الكميتين الموجبتين نحصل على : $-3x = 2\ln x$

■ (I) 4



■ (II) 1 ا

لدينا : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

ليكن : $y \in f(I)$

هذا يعني أن : $f(x) = y$; $(\exists x \in I)$

لدينا : $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ و f دالة تناقصية على I

إن : $f\left(\frac{1}{3}\right) \geq f(x) \geq f(1)$

أي : $0,5 \geq y \geq 0,36$

ومنه : $1 > 0,5 \geq y > 0,36 \geq \frac{1}{3}$

إن : $1 \geq y \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $y \in I$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي : $y \in f(I) \Rightarrow y \in I$

و بالتالي : $f(I) \subset I$

■ (II) 1 ب

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$; $(\forall x > 0)$

ليكن x عنصراً من $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ إن : $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$ لأن f تناقصية على المجال $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right]$

يعني : $f(x) \leq 0,5 < 1$

ومنه : $f(x) < 1$

إن : $|f(x)| < 1$ (1)

$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| : \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ إذن}$$

■ (II) ② (ج)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_3| &\leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \text{ إذن } (*)$$

$$\frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1 : \text{يعني } \alpha_3 \in I \text{ لدينا}$$

$$\left| \frac{1}{3} - \alpha_3 \right| \leq \frac{2}{3} : \text{أي } -\frac{2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3} \text{ ومنه}$$

$$|u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} : \text{يعني}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \text{ ونعلم أن } (*) \text{ وذلك حسب}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ وبالتالي}$$

$$g_3(x) = 0 : \text{يعني } 3x + 2\ln x = 0 \text{ ومنه}$$

و نعلم حسب السؤال (3) (i) من الجزء الأول أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}} : \text{بحيث } x = \alpha_3 \text{ إذن}$$

■ (II) ② (i)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نبرهن بالترجع على أن : $u_n \in I ; (\forall n \in \mathbb{N})$

$$u_0 = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3}; 1\right] = I \text{ لدينا } n = 0 \text{ من أجل}$$

$$u_0 \in I \text{ إذن}$$

نفترض أن : $u_n \in I ; (\forall n \in \mathbb{N})$

بما أن f متصلة على المجال I .

$$u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in f(I) \text{ فإن}$$

و نعلم أن : $f(I) \subset I$ و ذلك حسب السؤال (1) (i)

$$f(u_n) \in f(I) \subset I \text{ إذن}$$

$$u_{n+1} \in I \text{ ومنه}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I \text{ وبالتالي}$$

■ (II) ② (ب)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I \text{ لدينا } (1)$$

$$\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}} : \text{ (ج) حسب نتيجة السؤال}$$

$$(2) \alpha_3 \in I \text{ إذن}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $[u_n; \alpha_3] \subset I$

و بما أن f دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على I .

فإن f دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على : $[u_n; \alpha_3]$ كذلك

و منه : حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

$$\exists c \in]u_n, \alpha_3[; \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3| \text{ ومنه}$$

$$(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \text{ حسب السؤال (ب)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |f'(c)| |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ فإن}$$

■ (III) 1 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : $F(x) = h(8x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 8h'(8x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\sqrt[3]{8x} e^{-8x} - \sqrt[3]{x} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\left(\frac{1}{8}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$$

و بما أن $\forall x \in [0, +\infty[; f(x) \geq 0$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(16e^{-7x} - 1)$

إذا كان : $x = \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) > 0$

و بالتالي : F دالة تزايدية على $\left[0, \frac{\ln 16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{\ln 16}{7}, +\infty\right]$

■ (III) 2 ا

ليكن x و t عددين حقيقيين موجبين بحيث : $x \leq t \leq 8x$

بما أن f دالة موجبة على : $[0, +\infty[$

فإن F دالة موجبة كذلك لأنها تكامل لدالة موجبة f .

و منه : $F(x) \geq 0$ (1)

ننطلق من الكتابة $t \leq 8x$ إذن : $\frac{1}{3} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}$

نضرب طرفي المتفاوتة الأخيرة في العدد الموجب و الغير المنعدم e^{-t}

نحصل على : $e^{-t} \frac{1}{3} \leq e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}}$

بإدخال التكامل على طرفي هذه المتفاوتة نحصل على :

$$\int_x^{8x} e^{-t} t^{\frac{1}{3}} dt \leq \int_x^{8x} e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}} dt$$

■ (II) 2 د

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1 فإن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3 \quad \text{و}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha_3$

■ (III) 1 ا

لدينا f دالة متصلة على $[0, +\infty[$

إذن : f متصلة على المجال $[0, x]$ كيفما كان x من $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : f تقبل دالة أصلية h على المجال $[0, x]$.

يعني : h قابلة للإشتقاق على $[0, x]$ بحيث : $h'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{8x} f(t) dt \quad \text{و لدينا} \\ &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{8x} f(t) dt \\ &= \int_0^{8x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \\ &= h(8x) - h(0) - h(x) + h(0) \\ &= h(8x) - h(x) \end{aligned}$$

لدينا : $x > 0$ يعني : $8x > 0$

و منه : $x \rightarrow h(8x)$ قابلة للإشتقاق على : $[0, +\infty[$

لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على : $[0, +\infty[$

و بالتالي : F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ لأنها مجموع

دالتين قابلتين للإشتقاق على $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_x^{8x} e^{-t} dt \\
&\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_x^{8x} \\
&\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x}) \\
&\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x}) \\
&\Leftrightarrow \boxed{F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})} \quad (2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 0) ; 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

■ (III) 2 (ب)

ننتقل من التأطير : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (Evidente)

و لدينا حسب جدول تغيرات f $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$

و بالتالي :

$$\begin{array}{ccc}
0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x}) \\
\begin{array}{ccc}
\swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\
+\infty & +\infty & +\infty \\
0 & 0 & 0
\end{array}
\end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{أي :}$$

■ (III) 2 (ج)

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0	$\frac{\ln 16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$		0	
		+	-
F	0	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■