



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

**التمرين الأول : (3,0 ن)**

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, p, q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{array} \right. \text{ بحيث : } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{array} \right. \text{ تعتبر في } \mathbb{Z} \text{ النظمة } (\mathcal{S}) \text{ التالية :}$$

① أ بين أنه يوجد زوج  $(u_0, v_0)$  من  $\mathbb{Z}^2$  بحيث :  $1 = pu_0 + qv_0$ . 0,50 ن

② ب بين أن  $x_0 = bpu_0 + aqv_0$  حل للنظمة  $(\mathcal{S})$ . 0,50 ن

③ أ ليكن  $x$  حل للنظمة  $(\mathcal{S})$  ، بين أن العدد  $pq$  يقسم العدد  $x_0 - x$ . 0,50 ن

④ ب ليكن  $x$  عدداً صحيحاً نسبياً بحيث :  $pq$  يقسم العدد  $x_0 - x$ . بين أن  $x$  حل للنظمة  $(\mathcal{S})$ . 0,50 ن

استنتج مجموعة حلول النظمة  $(\mathcal{S})$ . 0,50 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{array} \right. \text{ حل في } \mathbb{Z} \text{ النظمة التالية :}$$

**التمرين الثاني : (2,0 ن)**

ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً فردياً أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على  $n$  صندوقاً مرقماً من 1 إلى  $n$  . الصندوق رقم  $k$  بحيث :  $1 \leq k \leq n$  يحتوي على  $k$  كرة بيضاء و  $(n - k)$  كرة سوداء.

نختار عشوائياً صندوقاً من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة .

① أ حسب احتمال الحصول على كرة بيضاء. 0,50 ن

② ب حسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي . 0,75 ن

③ ج حسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علماً أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي . 0,75 ن

**التمرين الثالث : (2,0 ن)**

نعتبر المجموعة :  $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

① أ حدد معادلة ديكارتية للمجموعة  $(\mathcal{H})$ . 0,25 ن

② ب بين أن  $(\mathcal{H})$  هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاريبه في المعلم  $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$ . 0,50 ن

③ ج أنشئ  $(\mathcal{H})$ . 0,25 ن

④ أ  $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$  نقطتان من  $(\mathcal{H})$  . نضع : 0,50 ن

⑤ ب بين أن :  $M(\varphi(a, b)) \in (\mathcal{H})$  . 0,50 ن

⑥ ج تتحقق أن  $\varphi(1, a) = \varphi(a, 1) = 1$  و أن  $\varphi(a, \bar{a}) = \varphi(a, 1)$  . 0,50 ن

⑦ أ  $M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$  بقانون التركيب الداخلي  $(*)$  حيث لكل  $(a)$  و  $(b)$   $M(a)$  و  $M(b)$  من  $(\mathcal{H})$  . 1,00 ن

⑧ ب بين أن :  $(\mathcal{H}), *$  زمرة تبادلية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متتجهي حقيقي .

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

نعتبر المجموعة التالية :

و هي مزودة بجمع المصفوفات (+) و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي (·) و ضرب المصفوفات (×) .

$$0 = \mathcal{M}(0,0) \quad I = \mathcal{M}(1,0) \quad J = \mathcal{M}(0,1)$$

نضع : (0,0,0,1) بين أن :  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  فضاء متتجهي حقيقي . ① 0,50

ب) بين أن  $(I, J)$  أساس للفضاء المتتجهي  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  و اعط بعده . 0,50

ليكن  $\alpha$  عددا عقديا لا ينتمي إلى  $\mathbb{R}$  ، بين أن الأسرة  $(\alpha, 1)$  أساس للفضاء المتتجهي الحقيقي  $(\mathbb{C}, +)$  . 0,50

نعتبر التطبيق  $\psi$  من  $\mathbb{C}$  نحو  $\mathcal{F}$  المعرف بما يلي : ③

$$\psi(z) = \mathcal{M}(m, n) \quad z \in \mathbb{C} \quad m \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{R}$$

حيث :  $z = m + \alpha n$

$$\text{تحقق أن } \psi(\alpha) = J^2 = -2(I + J) \quad ① \quad 0,50$$

ب) حدد قيمتي  $\alpha$  التي يكون من أجلها التطبيق  $\psi$  تشاكلًا تقابليا من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(\mathcal{F}, \times)$  . 0,50

$$\text{نأخذ: } \alpha = -1 + i \quad \text{أكتب في الأساس } (I, J) \text{ المصفوفة } J^{2007} \quad ④ \quad 0,50$$

التمرين الخامس : (9,0 ن)

$$g(x) = 1 + x - e^{-x}$$

① أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  . 0,50

$$\text{ب) أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{و وضع جدول تغيرات الدالة} \quad 0,50$$

② استنتج أن  $x_0 = 0$  هو الحل الوحيد للمعادلة . 0,50

$$f(x) = \frac{1}{1 + x - e^{-x}}$$

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :

ـ) المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد منظم  $(\mathcal{J}, \vec{i})$  .

$$\text{أ) أحسب النهايات التالية: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad 0,50$$

ب) أحسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  . 0,25

ـ) وضع جدول تغيرات الدالة  $f$  . 0,50

ـ) أنشئ  $(\mathcal{C})$  . 0,50

ـ) ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ، بين أن المعادلة  $f(x) = n$  تقبل حلًا وحيدًا  $x_n$  في المجال  $[0, +\infty]$  . 0,50

ـ) بين أن المتتالية  $(x_n)_{n \geq 1}$  تناقصية وأنها متقاربة . 0,50

$$\text{ـ) أثبت أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \quad 0,50$$

الاجوبة من اقتراح الاستاذ بدر الدين الفاتحى - الصفحة: 111 - رمضان 2012 -

ن 0,25 (1) (II) بين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تكافئ المعادلة  $e^x = x$

ن 0,50 (2) بين أن المعادلة  $e^x = x$  تقبل حلا وحيدا هو  $\alpha = x_1$  بحيث :

(2) تعتبر المتتالية  $(y_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلى :

ن 0,50 (3) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :

ن 0,50 (4) بين أن :

ن 0,50 (5) استنتج أن :  $(y_n)_{n \geq 1}$  متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن  $\mathcal{F}$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بما يلى :

$$(\forall x > 0) : \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{و} \quad \mathcal{F}(0) = \frac{1}{2} \ln 2$$

ن 0,25 (1) (6) بين أن  $\frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$  ———

ن 0,50 (7) استنتاج النهاية التالية :

ن 0,50 (8) (2) بين أن :  $1-t \leq e^{-1} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$  ———

ن 0,50 (9) (3) بين أن لكل  $t$  من المجال  $[0,4] :$   $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$

ن 0,25 (10) (4) استنتاج أن  $\mathcal{F}$  متصلة على اليمين في 0

ن 0,50 (11) (5) (3) بين أن  $\mathcal{F}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و أحسب  $(\mathcal{F}'(x))$  من أجل  $x > 0$ .

ن 0,25 (12) (6) أدرس تغيرات الدالة  $\mathcal{F}$  على  $\mathbb{R}_+$ .

نعود إلى التمرين لاستغلال الخاصية المبرهن عليها :

ليكن  $x$  حل للنظامة ( $\mathcal{S}$ ) .

.  $pq / (x - x_0)$  نريد أن نبين أن

. لدينا :  $x_0$  و  $x$  حلان للنظامة ( $\mathcal{S}$ ) .

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \\ x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$(\exists k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} (x - a) = k_1 p \\ (x - b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - a) - (x_0 - a) \quad \text{لدينا :} \\ &= k_1 p - k_3 p \\ &= (k_1 - k_3)p \end{aligned}$$

$$(1) \boxed{p / (x - x_0)} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - b) - (x_0 - b) \quad \text{و لدينا كذلك :} \\ &= k_2 q - k_4 q \\ &= (k_2 - k_4)q \end{aligned}$$

$$(2) \boxed{q / (x - x_0)} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} p / (x - x_0) \\ q / (x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \quad \text{حصلنا لحد الآن على :}$$

.  $pq / (x - x_0)$  من هذه الأشياء نستنتج حسب الخاصية أن :

■ ③ ■

تنطق من :  $pq / (x - x_0)$

و نريد أن نبين أن :  $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$  لدينا  $x_0$  حل للنظامة ( $\mathcal{S}$ ) يعني :

$$(\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} x_0 = k_1 p + a & (1) \\ x_0 = k_2 q + b & (2) \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

و لدينا حسب الإنطلاقة :  $pq / (x - x_0)$

$$(\exists k_3 \in \mathbb{Z}) ; \boxed{(x - x_0) = k_3 pq} \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (3) نستنتج أن :  $x - (k_1 p + a) = k_3 pq$

$p / (x - a)$  يعني :  $x - a = p(k_3 q + k_1)$  أي :

$$(4) \boxed{x \equiv a[p]} \quad \text{و وبالتالي :}$$

لدينا :  $p \wedge q = 1$

إذن حسب مبرهنة Bezout

$$(\exists u_0, v_0 \in \mathbb{Z}) : pu_0 + qv_0 = 1$$

■ ① ■

لدينا :  $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

$$qv_0 = 1 - pu_0 \quad \text{لدينا حسب السؤال ① ■}$$

إذن :  $x_0 = bpu_0 + a(1 - pu_0)$

يعني :  $x_0 = bpu_0 + a - apu_0$

و منه :  $x_0 = p(bu_0 - au_0) + a$

إذن :  $x_0 - a = p(bu_0 - au_0)$

(1)  $\boxed{x_0 \equiv a [p]}$  يعني :  $p / (x_0 - a)$  و وبالتالي :

و لدينا كذلك حسب السؤال ① ■

$$pu_0 = 1 - qv_0 \quad \text{إذن :}$$

$x_0 = b(1 - qv_0) + v_0 a$

$$= b - bqv_0 + qv_0 a$$

$$= q(v_0 a - bv_0) + b$$

و منه :  $x_0 - b = q(v_0 a - bv_0)$

(2)  $\boxed{x_0 \equiv b [q]}$  يعني :  $q / (x_0 - b)$  و وبالتالي :

من (1) و (2) نستنتج أن  $x_0$  حل للنظامة ( $\mathcal{S}$ ) .

■ ② ■

لإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى خاصية قوية في الحسابيات و هي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn / a$$

لنبرهن أولاً على صحة هذه الخاصية

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; a = mk \quad \text{لدينا : } m / a \quad \text{إذن :}$$

و لدينا كذلك :  $n / mk$  إذن حسب (\*) :

و بما أن  $1 / k$  فإنه حسب Gauss  $m \wedge n = 1$

(\*\*)

$$(\exists k' \in \mathbb{Z}) ; k = nk' \quad \text{يعني :}$$

من (\*) و (\*\*) نستنتج أن :  $a = mnk'$

إذن :  $mn / a$

. (4) ننطلق من النتيجة

(4) $1 = 3 - 2$	$\xrightarrow{(3)}$ $1 = 3 - (5 - 3)$ $1 = 2 \times 3 - 5$ : يعني <b>رس</b> $\xrightarrow{(2)}$ $1 = 2(8 - 5) - 5$ $1 = 2 \times 8 - 3 \times 5$ : يعني <b>حسب</b> $\xrightarrow{(1)}$ $1 = 2 \times 8 - 3(13 - 8)$ <b>يعني</b> : $1 = 5 \times 8 - 3 \times 13$
-----------------	---

من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن:  $v_0 = -3$  و  $u_0 = 5$

$$\begin{aligned} x_0 &= 3pu_0 + qv_0 \\ &= (3 \times 8 \times 5) - (13 \times 3) \\ &= 81 \end{aligned}$$

إذن نستنتج التكافؤ التالي :

$$x \equiv 81[104] \Leftrightarrow (\mathcal{S}_0) \text{ حل النظمة } x$$

$$x = 104k + 81 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

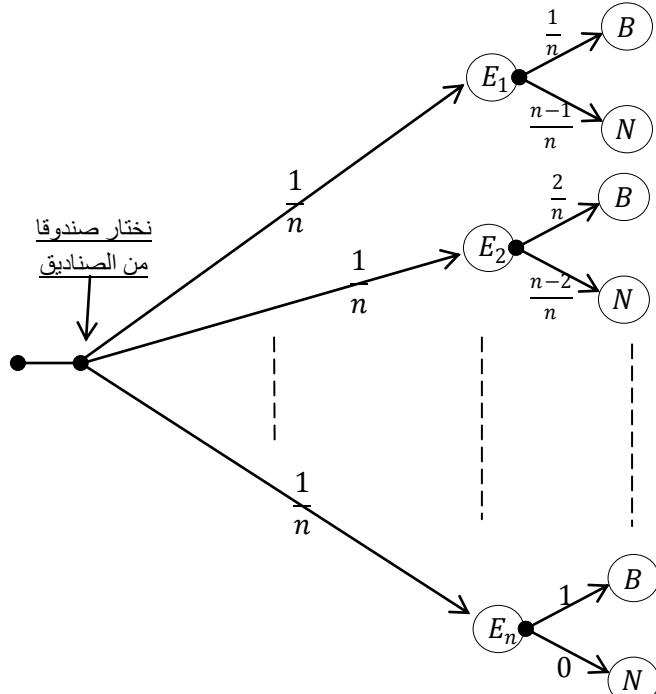
### التمرين الثاني : ( 2,0 )

- (1) ■

في جل مراحل هذا التمرين، نشتغل بـ :

" اختيار الصندوق رقم $i$	$E_i$	نضع :
" سحب كرة بيضاء	$B$	
" سحب كرة سوداء	$N$	

نحو التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(x - b) = q(k_3 p + k_2) \quad : \text{ذن}$$

(5)  $x \equiv b[q]$  : يعني  $q / (x - b)$  و منه :

من (4) و (5) نستنتج أن  $x$  حل للنقطة (5).

من السؤالين (2) و (3) نستنتج التكافؤ التالي :

$$x \text{ حل للنقطة } (\mathcal{S}) \iff pq / (x - x_0)$$

$$\text{إذن : } x \text{ حل للنظامة } (\mathcal{S}) \iff x \equiv x_0[pq]$$

إذن مجموعة حلول النظمة ( $\mathcal{S}$ ) هي :

نشير إلى أن  $\bar{x}_0$  عنصر من الفضاء المتجهي :  $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$   
بتعبير آخر : مجموعة حلول النظمة  $(\mathcal{S})$  هي جميع الأعداد النسبية التي  
 يكون باقي قسمتها على  $pq$  مساوياً لـ  $x_0$ .

نريد أن نحل في  $\mathbb{Z}$  النظمة  $(\mathcal{S}_0)$  التالية :  
 $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

الأسئلة السابقة تعتبر دراسة نظرية لحلول النظمة:

$$p \wedge q = 1 \quad : \text{مع}$$

و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة

$x \equiv x_0[8 \times 13]$  : هذا يعني

للحسب الان  $x_0$  . نضع :  $p = 8$  و  $q = 13$


انطلاقاً من هذه الشجرة نستنتج أن :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum_{i=1}^n P(B \cap E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{i}{n} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\
 &= \boxed{\frac{(n+1)}{2n}}
 \end{aligned}$$

### التمرين الثالث : (ن 3,0)

\_\_\_\_\_ (ج) ① ■

$(H) : \{M(z)/z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$  لدينا :

$$z = x + iy \quad \text{وضع :}$$

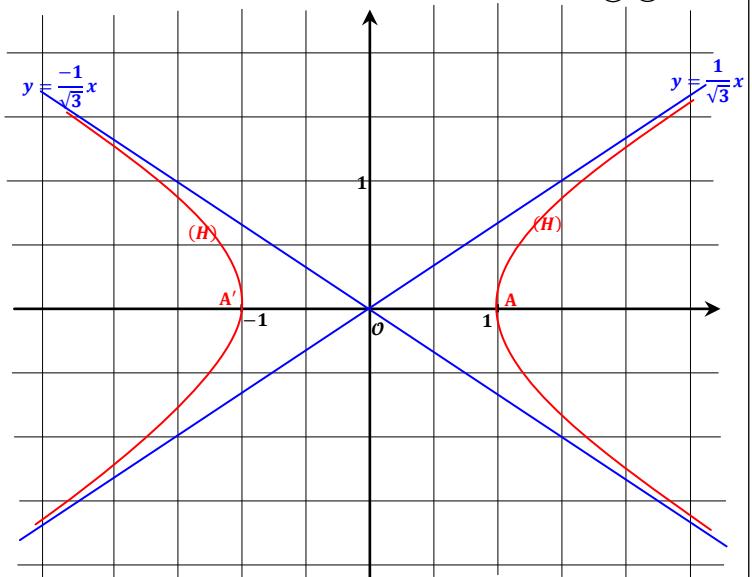
$$\begin{aligned}
 M(z) \in (H) &\Leftrightarrow (x+iy)^2 + (x-iy)^2 - (x^2 + y^2) = 1 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1
 \end{aligned}$$

إذن  $(H)$  هنلول مركزه :

$A'(-1,0)$  و  $A(1,0)$  و رأساه :

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{و مقاربه :}$$

\_\_\_\_\_ (ج) ① ■



في هذا السؤال لا يهمنا لون الكرة و يمكن إعادة صياغة السؤال بالطريقة التالية :

" ما هو احتمال اختيار صندوق فردي من بين  $n$  صندوق " و هذه التجربة يمكن نمذجتها بالشجرة التالية :

```

graph LR
    Start(( )) --> BoxFre(Fre)
    Start --> BoxZo(Zo)
    BoxFre --> N1[N]
    BoxFre --> B1[B]
    BoxZo --> N2[N]
    BoxZo --> B2[B]
    
```

من جهة أخرى لدينا  $n$  عدد فردي إذن في المجموعة  $\{1; 2; 3; \dots; n\}$  يوجد  $\frac{(n+1)}{2}$  عدد فردي.

إذن :  $p = \frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{عدد الصناديق}} = \frac{\text{صندوق فردي}}{\text{عدد الصناديق}}$

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\frac{(n+1)}{2}}{n} = \boxed{\frac{(n+1)}{2n}}
 \end{aligned}$$

" الحصول على كرة بيضاء علماً أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي "

بالعودة إلى شجرة الإحتمالات السابقة نكتب :

$$\begin{aligned}
 P(B_I) &= \sum_{i=1}^n P(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (2k+1) = \frac{1}{n^2} \left( 2 \left( \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} k \right) + \left( \frac{n-1}{2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

باستعمال العلاقة (\*) نحصل على :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 2|ab|^2 - ((ab)^2 + (\bar{ab})^2) + 1 \\ + (ab)^2 + (\bar{ab})^2 - 2|ab|^2 = 1$$

$$\boxed{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1} \quad \text{حصلنا إذن على العلاقة التالية}$$

أو باستعمال الترميز الأصلي

$$\boxed{(\varphi(a, b))^2 + (\overline{\varphi(a, b)})^2 - |(\varphi(a, b))|^2 = 1}$$

. وبالتالي :  $M(\varphi(a, b))$  نقطة من (H)

• (2) ■

$$\varphi(z, 1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\begin{aligned} \varphi(z, \bar{z}) &= zz + \bar{z}\bar{z} - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

• (3) ■

نريد أن نبين أن \* تجمعي و تبادلي و يقبل عنصراً محايداً وكل عنصر يمتلك ممثلاً في (H) بالقانون \*

نحتاج في البداية أن نبين الخاصيتين التاليتين و المتعلقتين بهذا التمررين فقط.

(2)

$$\boxed{\varphi(a, b) = \varphi(\bar{a}, \bar{b})}$$

(1)

$$\boxed{\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = ab - \bar{ab}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= (\bar{a}b + a\bar{b} - \bar{a}\bar{b}) \quad \text{لدينا :} \\ &= a\bar{b} + \bar{a}b - ab \\ &= \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ = ab - \bar{ab}$$

الآن ليمكن  $M(c)$  و  $M(b)$  و  $M(a)$  ثلاثة عناصر من (H).

$$\begin{aligned} (M(a) * M(b)) * M(c) &= M(\varphi(a, b)) * M(c) \quad \text{لدينا :} \\ &= M(\varphi(a, b)) * M(c) \\ &= M[\varphi(\varphi(a, b), c)] \end{aligned}$$

• (1) (2) ■

لتكن  $(a)$  و  $(b)$  نقطتين من (H)

$$\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b} \quad \text{نضع :}$$

من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتاً :  $\varphi(a, b) = \varphi$

. لدينا :  $M(b)$  و  $M(a)$  نقطتان من (H).

$$\begin{cases} a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1 \\ b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نضرب المتساويتين طرفاً بطرف نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

$$\begin{aligned} ((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ = 1 - ((ab)^2 + (\bar{ab})^2) - |ab|^2 \end{aligned}$$

يعني : ولدينا :

$$\begin{aligned} \varphi\bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= 3|ab|^2 + ((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &\quad + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 3|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{ab})^2) - |ab|^2 \end{aligned}$$

$$(*) \boxed{\varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{ab})^2)} \quad \text{إذن :}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi - \bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \bar{ab} \end{aligned}$$

$$(**) \boxed{\varphi - \bar{\varphi} = ab - \bar{ab}} \quad \text{إذن :}$$

و منه :  $(\varphi - \bar{\varphi})^2 = \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi}$

$$= (ab)^2 + (\bar{ab})^2 - 2|ab|^2$$

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} &= (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\bar{ab})^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

و منه :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + ((ab)^2 + (\bar{ab})^2 - 2|ab|^2)$$

### العنصر المحايد:

$M(a) * M(e) = M(a)$  ننطلق من الكتابة :

$M(\varphi(a, e)) = M(\varphi(a, 1))$  يعني :

$\varphi(a, e) = \varphi(a, 1)$  يعني :

$e = 1$  ومنه :

$M(a) * M(1) = M(a)$  يعني :

و نشير هنا إلى أن :  $M(1)\epsilon(H)$  لأن :

و بما أن القانون \* تبادلي فإن :

$M(a) * M(e) = M(e) * M(a) = M(a)$

. (H) إذن  $M(1)$  هو العنصر المحايد للقانون \* في (H)

المماثل:  $M(a), M(x) \in (H)$  لیکن :

$M(a) * M(x) = M(1)$  ننطلق من الكتابة :

$M(\varphi(a, x)) = M(\varphi(a, \bar{a}))$  يعني :

$\varphi(a, x) = \varphi(a, \bar{a})$  يعني :

$x = \bar{a}$  منه :

بما أن  $(H)$  فإن  $M(a) \in (H)$

.  $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$  يعني :  $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$  منه :

$M(\bar{a}) \in (H)$  منه :

وبالتالي : كل عنصر  $M(a)$  من (H) يقبل مماثلا  $M(\bar{a})$  من (H) بالقانون \*

خلاصة: زمرة تبادلية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

1(1)■

لدينا  $\mathcal{F}$  جزء غير فارغ من المجموعة :

$\mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$  لأن :

و لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a, b) - \mathcal{M}(c, d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}((a-c), (b-d)) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

إذن : زمرة جزئية من  $(\mathcal{F}, +)$

$$\begin{aligned} &= c\overline{\varphi(a, b)} + \bar{c}\varphi(a, b) - \bar{c}\overline{\varphi(a, b)} \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}\varphi(a, b) - \bar{c}\varphi(\bar{a}, \bar{b}) \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b})) \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(ab - \bar{ab}) \\ &= c(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) + \bar{c}ab - \overline{abc} \\ &= \bar{a}bc + cab - abc + \bar{c}ab - \overline{abc} \end{aligned} \quad (3)$$

### بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned} M(a) * (M(b) * M(c)) &= M(a) * M(\varphi(b, c)) \\ &= M(\varphi(a, \varphi(b, c))) \\ &= \bar{a}\varphi(b, c) + a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) - \bar{a}\varphi(\bar{b}, \bar{c}) \\ &= a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a}(\varphi(b, c) - \varphi(\bar{b}, \bar{c})) \\ &= a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a}(bc - \bar{bc}) \\ &= a(\bar{b}c + b\bar{c} - bc) + \bar{a}bc - \overline{abc} \\ (4) \quad &= \bar{b}ca + ab\bar{c} - abc + \bar{a}bc - \overline{abc} \end{aligned}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(M(a) * M(b)) * M(c) = M(a) * (M(b) * M(c))$$

و بالتالي : \* قانون تجمعي في (H).

### التبادلية :

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab} \\ &= b\bar{a} + \bar{b}a - \overline{ba} \\ &= \varphi(b, a) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \varphi(a, b) = \varphi(b, a) \quad \text{إذن :}$$

لتكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين .

$$\begin{aligned} M(a) * M(b) &= M(\varphi(a, b)) \\ &= M(\varphi(b, a)) \\ &= M(b) * M(a) \end{aligned}$$

و بالتالي : \* قانون تبادل في (H)

$$\begin{cases} m_1 = \left( x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y \right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left( \frac{y}{\alpha_2} \right) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و منه:} \\ (\forall z \in \mathbb{C}), (\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) ; \quad z = m_1 + m_2 \alpha \quad \text{يعني:}$$

(8) إذن أسرة مولدة لـ  $\mathbb{C} \setminus \{1; \alpha\}$

$$x + \alpha y = 0 \quad \text{لتكن } x + \alpha y \text{ تأليف خطية منعدمة لـ 1 و } \alpha \text{ يعني:} \\ \Leftrightarrow x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

(9) إذن أسرة حرة  $\{1; \alpha\}$

من (8) و (9) نستنتج أن  $\{1; \alpha\}$  أساس للفضاء المتجهي  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

————— (1) (3) ■

نضع:  $y \in \mathbb{R}$  و  $x \in \mathbb{R}$  بحيث:  $z = x + \alpha y$

نعتبر التطبيق  $\psi$  المعرف بما يلي:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{C} &\rightarrow F \\ z &\rightarrow M(a, b) \end{aligned}$$

.  $\psi(\alpha) = M(0, 1) = J$  إذن:  $\alpha = 0 + \alpha 1$  لدينا:

$$\begin{aligned} J^2 + 2(I + J) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ لدينا} \\ &\quad + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$J^2 = -2(I + J)$  يعني:  $J^2 + 2(I + J) = \Theta$  منه:

————— (b) (3) ■

ليكن  $z' = c + \alpha d$  و  $z = x + \alpha y$  عقبيان عقبيان بحيث:

لكي يكون  $\psi$  تشاكلًا يكفي أن يتحقق:  $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$

يعني:  $\psi((x + \alpha y) \times (c + \alpha d)) = \psi(x + \alpha y) \times \psi(c + \alpha d)$

لدينا:  $\psi(x + \alpha y) \times \psi(c + \alpha d) = M(x, y) \times M(c, d)$

$$\begin{aligned} &= (xI + yJ) \times (cI + dJ) \\ &= xcI + xdJ + ycJ + ydJ^2 \\ &= xcI + xdJ + ycJ + yd(-2(I + J)) \\ &= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J \\ &= M((xc - 2yd); (xd + yc - 2yd)) \\ &= \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a, b) \in \mathcal{F} \quad \text{ل يكن:} \\ \lambda \mathcal{M}(a, b) &= \lambda \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a - 3\lambda b \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) \in (\mathcal{F}) \end{aligned}$$

إذن  $\mathcal{F}$  جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي (.)

و نعلم أن  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و  $\mathcal{F}$  جزء من  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  تبقى صالحة للمجموعة  $\mathcal{F}$  إذن الخصائص التالية الخاصة بالمجموعة  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  و منه:

$$(\forall M, M' \in \mathcal{F}), (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) ; \quad \begin{cases} \alpha(M + M') = \alpha M + \alpha M' \\ (\alpha + \beta)M = \alpha M + \beta M \\ (\alpha\beta)M = \alpha(\beta \cdot M) \\ I \cdot M = M \end{cases}$$

إذن:  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

————— (b) (1) ■

يكفي أن تكون الأسرة  $(I, J)$  مولدة للفضاء  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  و أن تكون أسرة حرة.

$$\begin{aligned} (\forall \mathcal{M}(a, b) \in \mathcal{F}) : \quad \mathcal{M}(a, b) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} : \text{ لدينا} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(a, b) = aI + bJ \end{aligned}$$

و منه: الأسرة  $(I, J)$  مولدة للفضاء  $\mathcal{F}$

ل يكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين بحيث:

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha - 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{يعني:}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \quad \text{يعني:} \\ \alpha = \beta = 0 \quad \text{و منه:}$$

إذن الأسرة  $(I, J)$  حرة.

و بالتالي  $(I, J)$  أساس للفضاء المتجهي الحقيقي  $\mathcal{F}$  و بعده يساوي 2

————— (2) ■

ل يكن  $\alpha$  عدداً عقدياً لا ينتمي إلى  $\mathbb{R}$

إذن:  $(\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}), (\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^*)$ ;  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  عدداً عقدياً.

نضع:  $z = m_1 + m_2 \alpha$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\alpha_2)$$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2\alpha_1 + im_2\alpha_2$$

$$\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1 \\ y = m_2\alpha_2 \end{cases}$$

بما أن:  $z = x + iy$  فإن:

$$\frac{6021\pi}{4} = 2 \times 752 \times \pi + \frac{5\pi}{4} \quad \text{و بما أن :}$$

$$\frac{6021\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi] \quad \text{فإن :}$$

$$\alpha^{2007} = \left[ \sqrt{2}^{2007}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad \text{و منه :}$$

لنكتب الآن  $\alpha^{2007}$  في الأساس  $(1, \alpha)$ .

$$(*) \boxed{\alpha^{2007} = x \cdot 1 + y \cdot \alpha} \quad \text{ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين بحيث :}$$

هدفنا هو تحديد  $x$  و  $y$

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= [x, 0] + \left[ \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \times [y, 0] \quad \text{لدينا :} \\ &= [x, 0] + \left[ \sqrt{2}y, \frac{3\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

إذن بالإستعانة بالمتساواية (\*) نحصل على :

$$\left[ \sqrt{2}^{2007}, \frac{5\pi}{4} \right] = [x, 0] + \left[ \sqrt{2}y, \frac{3\pi}{4} \right]$$

و منه : **الجزءان الحقيقيان لطيفي هذه المتساوية متساويان.** و **الجزءان التخيليان متساويان كذلك.** و من ثم نحصل على النظمة  $(\mathcal{S})$  التالية :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = x + \sqrt{2}y \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}^{2007} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}y \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ولدينا كذلك :} \\ \text{إذن النظمة } (\mathcal{S}) \text{ تصبح :}$$

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x + \sqrt{2}y \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sqrt{2}^{2007} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن :

ولدينا حسب المعادلة الأولى :

$$x = -2^{1003} - (2^{1003} \times 2^0) = -2^{1004}$$

$$\boxed{\alpha^{2007} = (-2^{1003}) + (-2^{1004})\alpha} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$| = \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha)$$

لكي يكون  $\psi$  تشاكلًا تقابليا يكفي أن يتحقق :

$$\begin{aligned} \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) \\ = \psi(xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha \\ = xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd \end{aligned}$$

نرتיב جيدا هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2 + (2yd)\alpha + (2yd) = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \text{يعني :}$$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية نجد :

$$\alpha = -1 - i \quad \text{أو} \quad \alpha = -1 + i$$

و نشير كذلك إلى أن لكل عنصر  $\mathcal{M}(x, y)$  يوجد عدد عقدي وحيد

$$\varphi(z) = \mathcal{M}(x, y) \quad \text{حيث } z = x + ya$$

و ذلك لأن  $(1, \alpha)$  أساس للفضاء المتجهي العقدي  $\mathbb{C}$

أو بتعبير آخر : كل عنصر  $z$  من  $\mathbb{C}$  يكتب بطريقة وحيدة على شكل تالية خطية للعددين 1 و  $\alpha$ .

خلاصة : من أجل  $1 - i$  أو  $\alpha = -1 + i$

$$\boxed{\psi \text{ تشاكل تقابللي من } (\mathbb{C}, \times) \text{ نحو } (\mathbb{F}, \times)} \quad \text{لدينا}$$

$$\alpha = -1 + i \quad \text{نأخذ :} \quad \blacksquare \quad \text{■}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \quad \text{لدينا :} \\ &= \sqrt{2} \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} = \left[ \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

و منه : حسب (Moivre)

$$\alpha^{2007} = \left[ \sqrt{2}^{2007}, \frac{2007 \times 3\pi}{4} \right]$$

$$= \left[ \sqrt{2}^{2007}, \frac{6021\pi}{4} \right]$$

١٢(٢)(I) ■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

١٢(٢)(I) ■

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{-(1 + e^{-x})^2}{(1 + x - e^{-x})^2}$$

١٢(٢)(I) ■

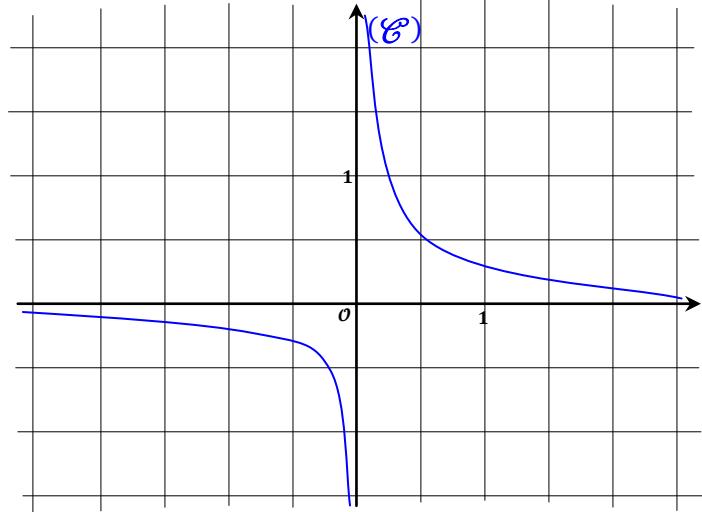
( $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ) ;  $f'(x) < 0$  لدينا :

إذن :  $f$  دالة تناظرية على  $\mathbb{R}^*$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f$	0	$+\infty$	0

١٢(٢)(I) ■



بعد حصولنا على هذه الصيغة التمينية تصبح التتمة سهلة و في المتناول

لدينا :  $J^{2007} = J \times J \times J \times \dots \times J$

$$= \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \dots \times \psi(\alpha)$$

$$= \psi(\alpha \times \alpha \times \alpha \times \dots \times \alpha)$$

$$= \psi(\alpha^{2007})$$

$$= \psi((-2^{1003}) + (-2^{1004})\alpha)$$

$$= M((-2^{1003}); (-2^{1004}))$$

$$= (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$$

و بالتالي :  $J^{2007} = (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$

التمرين الخامس : (٩,٠ ن)

١٢(١)(I) ■

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}$ .

لدينا :  $g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$

إذن :  $g$  دالة تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

١٢(١)(I) ■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g$	$-\infty$	0	$+\infty$

١٢(١)(I) ■

لدينا  $g$  دالة متصلة و تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  إذن فهي تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $(\mathbb{R})$ .

$$g(\mathbb{R}) = g([- \infty, +\infty]) = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right] = [-\infty; +\infty] = \mathbb{R}$$

لدينا :  $0 \in \mathbb{R}$  إذن يوجد عدد وحيد  $x_0$  من  $\mathbb{R}$  بحيث :

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $g$  :

إذن :  $0$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $. g(x) = 0$

و هذا يتناقض مع كون  $\ell > 0$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x_n) = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

Ⓐ(1)(II)■

$f(x) = 1$  نطاق من الكتابة :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x-e^{-x}} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1+x-e^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = x \end{aligned}$$

Ⓑ(1)(II)■

$\varphi(x) = e^{-x} - x$  نضع :

لدينا  $\varphi$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  لأنها فرق دالتين متصلتين على  $\mathbb{R}$ .

و منه :  $\varphi$  متصلة على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} - \frac{1}{e} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\varphi(1) = e^{-1} - 1 \quad \text{و}$$

نحدد الآن إشارة كل من  $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$  و  $\varphi(1)$

لدينا :  $e^{-1} - 1 < 0$  إذن  $-1 < 0$  يعني :  $e^{-1} < 0$

(1)  $\boxed{\varphi(1) < 0}$  و منه :

ولدينا  $\frac{1}{e} < 1$  إذن  $e > 1$

$\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} > \frac{1}{e}$  يعني :  $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e$  و منه :

(2)  $\boxed{\varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0}$  إذن :

من (1) و (2) نستنتج أن :  $\varphi(1) \times \varphi\left(\frac{1}{e}\right) < 0$

$\left(\exists \alpha \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]\right) : \varphi(\alpha) = 0$

$\left(\exists \alpha \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]\right) : e^{-\alpha} = \alpha$  أو بتعبير آخر :

Ⓐ(3)(I)■ نضع :  $h(x) = f(x) - n$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - n) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - n) = -n \quad \text{و}$$

ولدينا  $h$  دالة تناصية قطعا على  $\mathbb{R}_+$  لأن :  $0 < h'(x) = f'(x) < 0$

. وبما أن  $f$  متصلة و تناصية على  $\mathbb{R}_+$

. فإن :  $h$  متصلة و تناصية على  $\mathbb{R}_+$

و منه :  $h$  تقابل من  $[0, +\infty)$  نحو  $[-n, +\infty)$

و بالتالي :  $(\exists! x_n \in \mathbb{R}_+) ; h(x_n) = 0$

(\*)  $\boxed{(\exists! x_n \in \mathbb{R}_+) ; f(x_n) = n}$  أي :

Ⓑ(3)(I)■

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

لدينا :  $f(x_{n+1}) > f(x_n)$  : (نحو  $n+1$ ) و منه حسب (\*)

و بما أن  $f$  دالة تناصية فإن :  $x_{n+1} < x_n$

و منه :  $x_n$  متالية تناصية

و بما أنها مصغرفة بالعدد 0 يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n > 0$

فإنها متقاربة.

Ⓒ(3)(I)■

لدينا حسب السؤال : Ⓐ(3)

$$\frac{1}{1+x_n-e^{-x_n}} = n \quad \text{يعني :}$$

$$(1+x_n-e^{-x_n}) = \frac{1}{n} \quad \text{يعني :}$$

نجعل  $n$  يؤول إلى  $(+\infty)$  نحصل على :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x_n-e^{-x_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(1+\ell) = e^{-\ell} \quad \text{يعني :} \quad 1+\ell-e^{-\ell} = 0$$

سنبرهن الآن بالخلف على أن :  $\ell \neq 0$

نفترض إذن أن :  $\ell > 0$

إذن :  $1+\ell > 0$  و  $e^{-\ell}$

بما أن :  $0 < (1+\ell) < 1$  فإن :  $(1+\ell) = e^{-\ell}$

يعني :  $-1 < \ell < 0$



و بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln(2)$$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2)$

لـ  $\boxed{\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}} \blacksquare$

ليكن  $t$  عدداً حقيقياً موجباً .

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 - t \\ \psi(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t - 1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

لدينا  $-t \leq 0$  إذن  $t \geq 0$

$h'(t) \leq \varphi'(t)$  يعني :  $-e^{-t} \leq -1$  و منه :

و بما أن  $h(0) = \varphi(0) = 1$

( $\forall t \in [0, +\infty]$ ) :  $h(t) \leq \varphi(t)$  فإن :

(1)  $\boxed{(\forall t \in [0, +\infty]) : e^{-t} \leq 1 - t}$  إذن :

من النتيجة (1) نستخلص :  $-e^{-t} \geq t - 1$

إذن :  $h'(t) \geq \psi'(t)$

و بما أن  $h(t) \geq \psi(t)$  فإن  $h(0) = \psi(0) = 1$

(2)  $\boxed{(\forall t \in [0, +\infty]) : e^{-t} \geq 1 - t + \frac{t^2}{2}}$  يعني :

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\boxed{(\forall t \geq 0) : \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)}$

$\boxed{\textcircled{2}\textcircled{3}} \blacksquare$

( $\forall t \geq 0$ ) ;  $1 - t \leq e^{-t}$  لدينا

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; t - 1 \geq -e^{-t}$

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (t + 1) + (t - 1) \geq (t + 1) - e^{-t}$

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; 2t \geq t + 1 - e^{-t}$

و بما أن :  $|y_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1}}_{\text{tend vers } 0} |1 - \alpha|$

فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha$  يعني :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \alpha| = 0$

و وبالتالي :  $(y_n)_{n \geq 1}$  متتالية متقاربة و نهايتها هي  $\alpha$

$\boxed{\textcircled{1}\textcircled{1}} \blacksquare$

ليكن  $0 < t > 0$  إذن :

يعني :  $-e^{-t} > -1$

$\Rightarrow (t + 1) - e^{-t} > (t + 1) - 1$

$\Rightarrow t + 1 - e^{-t} > t$

$\Rightarrow \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} < \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \boxed{f(t) < \frac{1}{t}} \quad (1)$

و لدينا كذلك :  $-e^{-t} < 0$

$\Rightarrow (t + 1) - e^{-t} < (t + 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} > \frac{1}{t + 1}$

$\Rightarrow \boxed{f(t) > \frac{1}{t + 1}} \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\boxed{(\forall t > 0) : \frac{1}{t + 1} < f(t) < \frac{1}{t}}$

$\boxed{\textcircled{1}\textcircled{1}} \blacksquare$

ليكن :  $x > 0$

$\boxed{(\forall t > 0) : \frac{1}{t + 1} < f(t) < \frac{1}{t}}$  لدينا حسب السؤال  $\boxed{\textcircled{1}}$

ندخل التكامل على هذا التأطير نحصل على :

$\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t + 1}\right) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$

$\Rightarrow [\ln(1 + t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t)]_x^{2x}$

$\Rightarrow \ln(1 + 2x) - \ln(1 + x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(x)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + 2x}{1 + x}\right) < F(x) < \ln(2)$

(i) (3)(III) ■

لدينا  $f$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بـ  $\mathcal{T}$   
 بحيث :  $\mathcal{T}'(x) = f(x)$

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [\mathcal{T}(t)]_x^{2x} = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x) \quad \text{لدينا :}$$

بما أن :  $x \rightarrow 2x$  و  $\mathcal{T}(x) \rightarrow \mathcal{T}(2x)$  دالتيں قابلتين للإشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  فإن :  $x \rightarrow \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$   
 و لدينا :  $F'(x) = 2\mathcal{T}'(x) - \mathcal{T}'(x)$

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{2g(x) - g(2x)}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{2(1 + x - e^{-x}) - (1 + 2x - e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(1 - 2e^{-x} + e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

(ii) (3)(III) ■

بما أن :  $g(x) > 0$  و  $g(2x) > 0$

و بما أن :  $e^{2x} > 0$  و  $(e^x - 1)^2 \geq 0$

فإن :  $F'(x) \geq 0$

و بالتالي :  $F$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+^*$

و الحمد لله رب العالمين ■

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t+1-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \quad (*)$$

$$(\forall t \geq 0) : \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \quad \text{لدينا كذلك :}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; -e^{-t} \geq -1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq (1+t) - 1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq \frac{4t-t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{1+t-e^{-t}} \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; f(t) \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) = \frac{2}{4t-t^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$(**) \quad (\forall t \geq 0) ; f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) \quad \text{لذن :}$$

من (\*) و (\*\*) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$$

(iii) (2)(III) ■  
 تنطلق من نتيجة السؤال (ii) :

$$\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\ln t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln t]_x^{2x} + \frac{1}{2} [\ln(4-t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4-2x}{4-x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{4-2x}{4-x} \right) = 0 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي  $F$  متصلة على يمين الصفر.