C: RS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة الاستدراكية 2008-
الموضوع

9	المعامل:	الرياضيات	المـــادة:
4س	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعـــب(ة):

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث : $z_2=-2z+3i$ و نضع $F=h\circ r$

1 ن 1) حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و عناصرهما المميزة .

2) نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

ونضع: $B=F(A)$ و $C=F(B)$ و $D=F(C)$

0,5 ن أ) بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن :

$$z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$$

0,25 ن ب) تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق : $F(\Omega)=\Omega$

0,75 ن 3) أ) حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألحاق النقط B و C و D على التوالي.

0,25 ن ب) بين أن النقط Ω و A و D مستقيمية.

0,5 ن ج) بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\left\{(B,4);(C,2);(D,1)\right\}$

0,25 ن د) حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي.

التمرين الثاني:(4 نقط)

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ x*y=x+y-3xy$$

0,25 ن 1) أ) تحقق أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

ب)بين أن $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية. ن0,75

2) أ) بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ن0,5
$\varphi(x)=1-3x$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

ب) بين أن : $\varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$ ن0,25

ج) بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ ن0,5

3) لكل x من المجموعة $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $x^{(0)}=0$
و $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$

أ) بين أن : $\varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ ن0,25

ب) استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n . ن0,5

4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :
$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ xTy=x+y-\frac{1}{3}$$

أ) بين أن : $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية . ن0,5

ب) بين أن : $(\mathbb{R},T,*)$ جسم تبادلي. ن0,5

التمرين الثالث:(2,5نقط)

يحتوي صندوق على أربع كرات:كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ,نسجل لونها ,ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون

و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$ ن1

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

0,75ن أ)بين أن احتمال الحدث $[X=2k]$ هو $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75ن ب)بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

التمرين الرابع:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي: $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$

أ)احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

0,5 $$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

0,75 ب)استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$.

0,5 3) أ)بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$

و أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$; $(\forall x\in I\setminus\{0\})$ حيث: $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

0,5 ب)بين أن : $g(x)<0$; $(\forall x\in I\setminus\{0\})$

0,25 ج)استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

0,5 4) أ)احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب)بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1,2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$ — 0,5

ج)أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha \approx 1,3$) — 0,5

II - 1) نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$.

أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I و أن : $0<\varphi'(x)\le\dfrac{2}{3}$; $(\forall x\ge 1)$ — 0,5

ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$ — 0,75

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$; $(\forall n\ge 0)$

أ)بين أن : $u_n\in J$; $(\forall n\ge 0)$ — 0,5

ب)بين أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n\ge 0)$ — 0,5

ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. — 0,5

III-نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$ — 0,5

ب)استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I . — 0,25

2) أ) بين أن : $F(x)\ge\int_1^x \dfrac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$; $(\forall x\ge 1)$ — 0,5

ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ — 0,5

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\dfrac{1}{2}$

ونعتبر الدالة $\tilde{F}$ المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:
$$\begin{cases}\tilde{F}(x)=F(x)\ ;\ x\in I\\ \tilde{F}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ell\end{cases}$$

أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $F(x)-\ell\ge f(x)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$; $(\forall x\in I)$ — 0,5

ب) استنتج أن الدالة $\tilde{F}$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\dfrac{1}{2}$ — 0,5

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ 1

ننطلق من الكتابة : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}\,\overrightarrow{VM}$$

و بالتالي : r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و لدينا كذلك : $h(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 3i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 2i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2(z - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_2 - i) = -2(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_2} = -2\,\overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2

■ 2 أ

ننطلق من الشكل التالي :

$$\begin{array}{ccccc} & & F = hor & & \\ M & \xrightarrow{\;r\;} & M_1 & \xrightarrow{\;h\;} & M' \\ z & \longrightarrow & z_1 & \longrightarrow & z' \end{array}$$

لدينا : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $h(z_1) = z'$

$$\Leftrightarrow \quad (z' - i) = -2(z_1 - i)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad (z' - i) = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

و لدينا :

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

إذن : $\boxed{(z' - i) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)}$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال أ

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\;\;F\;\;} & M' \\ z & \longrightarrow & z' = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i) + i \end{array}$$

لنحل المعادلة : $F(M) = M$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = 2ie^{\frac{4i\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = i\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i$$

$$\Leftrightarrow \quad M \equiv \Omega$$

و بالتالي : Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$

■ 3 أ

لدينا : $F(A) = B$

$$\Leftrightarrow \quad z_B - i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z_A - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(i - a) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_B = -\left(a + \sqrt{3}\right) + i\left(2 - a\sqrt{3}\right)}$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابتين $F(B) = C$ و $F(C) = D$

لنحصل على :

$$\boxed{z_C = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)}$$

و $\boxed{z_D = 8a - 7i}$

■ ③ ب

لدينا : $\dfrac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{i - a}{8a - 7i - a} = \dfrac{-1}{7} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}$$

و بالتالي : النقط A و Ω و D نقط مستقيمية .

■ ③ ج

لدينا : $\dfrac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \dfrac{7i}{7} = z_\Omega$

نستنتج إذن أن : النقطة Ω هي مرجح النظمة المتزنة :

$\{(B,4); (C,2); (D,1)\}$

■ ③ د

ننطلق من كون D نقطة من المحور الحقيقي . و نضع : $a = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad z_D \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8a - 7i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8y - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{7}{8}}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي. و معادلته : $y = \frac{7}{8}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ ① أ

$$1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy)$$
$$= 1 - 3x - 3y + 9xy$$
$$= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x)$$
$$= (1 - 3x)(1 - 3y)$$

■ ① ب

لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{3} \quad و \quad y \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x) \neq 0 \quad و \quad (1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 3(x * y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $x * (y * z) = x * (y + z - 3yz)$

$$= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz)$$
$$= \boxed{x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz}$$

و لدينا : $(x * y) * z = (x + y - 3xy) * z$

$$= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy)$$
$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التبادلية : لدينا : $x * y = x + y - 3xy$

$$= y + x - 3yx$$
$$= y * x$$

إذن تبادلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \; ; \; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x + e - 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1 - 3x) = 0$$

بما أن $x \neq \frac{1}{3}$ فإن $(1 - 3x) \neq 0$

إذن : $e = 0$

مع : $e \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ لأن : $0 \neq \frac{1}{3}$

التماثل: ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ $*$

$$\Leftrightarrow \quad x * x' = x' * x = e$$
$$\Leftrightarrow \quad x + x' - 3xx' = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x'(1-3x) = -x$$
$$\Leftrightarrow \quad x' = \frac{-x}{(1-3x)}$$

و لدينا : $1 - 3x \neq -3x \quad \Rightarrow \quad 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-3x} \neq \frac{-1}{3x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \neq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

و منه : كل عنصر x من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x}\right)$ في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ بالنسبة للقانون $*$.

خلاصة: $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ زمرة تبادلية .

■ 2 أ

لدينا :

$$\varphi : \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{3}\right\} ; *\right) \longrightarrow (\mathbb{R}^* ; \times), \qquad x \longmapsto 1 - 3x$$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $\varphi(x * y) = 1 - 3(x * y)$

و منه حسب السؤال 1 أ

$$\varphi(x * y) = (1-3x)(1-3y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^*$

المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو : $x = \frac{1-y}{3}$

إذن φ تقابل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\varphi^{-1} : (\mathbb{R}^* ; \times) \longrightarrow \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{3}\right\} ; *\right), \qquad y \longmapsto \frac{1-y}{3}$$

■ 2 ب

لدينا : $\varphi'(x) = -3 < 0$

إذن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$

و منه : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \varphi^{-1}(]0;+\infty[)$

$$= \left] \lim_{y\to+\infty} \varphi^{-1}(y) \; ; \; \varphi^{-1}(0) \right[$$
$$= \left] \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{3}\right) ; \frac{1}{3} \right[$$
$$= \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[$$

■ 2 ج

لدينا : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ جزء غير فارغ من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

يعني : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

لدينا : $x * y' = x * \left(\frac{-y}{1-3y}\right)$

$$= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x(1-3y) - y + 3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x-y}{1-3y}$$

و لدينا x و y عنصرين من $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$

إذن : $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$

و منه : $3x < 1$ و $3y < 1$

إذن : $\boxed{3x - 3y < 1 - 3y}$ (1) و $\boxed{(1-3y) > 0}$ (2)

نضرب طرفي المتفاوتة (1) في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1-3y}\right)$: نحصل على :

$$\frac{3x-3y}{1-3y} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$$
$$\Leftrightarrow \quad x * y' \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$$

و بالتالي : $\left(\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[; *\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$

■ 3) أ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \varphi\left(\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n\ \text{مرة}}\right)$

$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right) = \varphi(x)\times\varphi(x)\times\cdots\times\varphi(x)$

$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

■ 3) ب)

ننطلق من الكتابة : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

$\Leftrightarrow\ 1-3x^{(n)} = (1-3x)^n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}}$

■ 4) أ)

لدينا T قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$

لأن : $\forall x,y\,\epsilon\,\mathbb{R}\ \ ;\ \ x+y-\frac{1}{3}\,\epsilon\,\mathbb{R}$

- T تبادلي في $\mathbb{R}$ لأن $+$ تبادلي في $\mathbb{R}$.

و لدينا : $x\top(y\top z) = x\top\left(x+y-\frac{1}{3}\right)$

$= x+x+y-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$

$= (x\top y)\top z$

- إذن T قانون تجميعي في $\mathbb{R}$

ليكن e العنصر المحايد لـ T في $\mathbb{R}$. $\Leftrightarrow\ x\top e = e\top x = x$

$\Leftrightarrow\ x+e-\frac{1}{3} = x$

$\Leftrightarrow\ e = \frac{1}{3}\,\epsilon\,\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و x' مماثله بالنسبة لـ T

$\Leftrightarrow\ x\top x' = x'\top x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\ x+x'-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\ x' = \left(\frac{2}{3}-x\right)\,\epsilon\,\mathbb{R}$

- و بالتالي : $\boxed{(\mathbb{R},\top)}$ زمرة تبادلية.

■ 4) ب)

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}$

لدينا : $x*(y\top z) = x*\left(y+z-\frac{1}{3}\right)$

$= \boxed{2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}}$

و لدينا : $(x*y)\top(x*z) = (x+y-3xy)\top(x+z-3xz)$

$= \boxed{2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}}$

نستنتج إذن أن : $x*(y\top z) = (x*y)\top(x*z)$

إذن القانون * توزيعي على القانون T (1)

و لدينا : $(\mathbb{R},\top)$ و $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ زمرتان تبادليتان. (2)

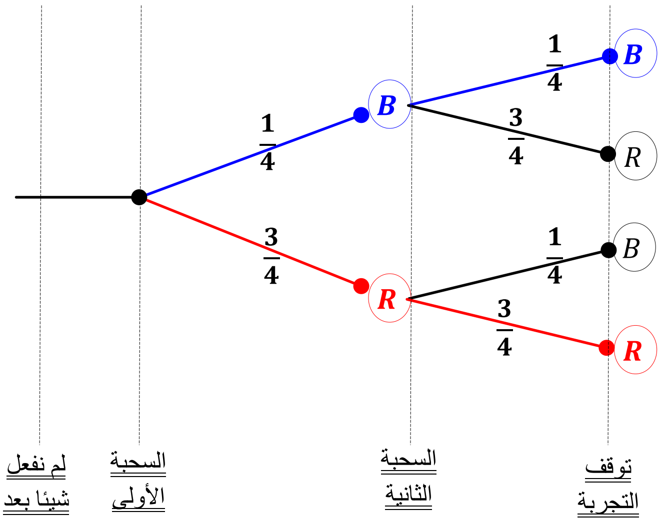
إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ 1)

$p[X=2]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :

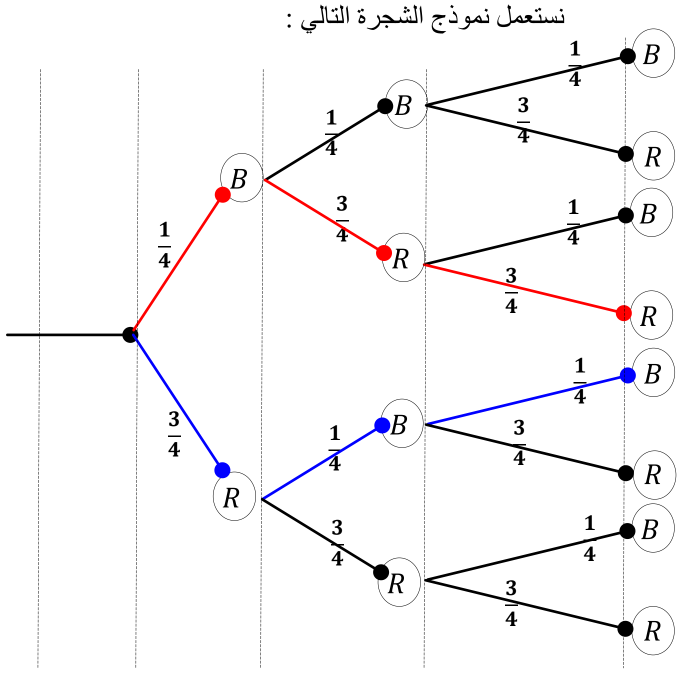


و منه احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p[X=2] = \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{5}{8}}$$

$p[X=3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



إذن : $p[X=3]=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{16}}$

■ ② أ

$p[X=2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $2k$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{\boldsymbol{BB}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة بيضاء و $(k-1)$ كرة حمراء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{\boldsymbol{RR}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و $(k-1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $(2k)$ هو :

$$p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\left(\frac{5}{8}\right)$$

■ ② ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{R\boldsymbol{B}}_{k}\ \boldsymbol{B}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k+1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{B\boldsymbol{R}}_{k}\ \boldsymbol{R}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k+1)$ هو :

$$p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\boxed{\left(\frac{3}{16}\right)^{k}}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) (1)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to 1\\ u=1+2x}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$$

$$= 2\lim_{u\to 1}\left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = \boxed{f(0)}$$

لأنه لدينا : $\boxed{(\forall x_0 > 0) \quad ; \quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}\right) = \frac{1}{x_0}}$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

■ (I) (2) أ

$$h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

و بما أن h_a دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0,a]$.

و $h_a(0) = h_a(a)$

فإنه حسب مبرهنة رول يوجد عنصر b من $]0,a[$ بحيث : $h_a'(b) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\ln(1+2a) - 2a)b = a^2\left(-2 + \frac{2}{1+2b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

■ (I) (2) ب

لدينا : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2}\right)$$

لدينا حسب السؤال (أ) يوجد b مرتبط بـ a بحيث : $a < b < 0$

و $\frac{ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر

و ذلك بسبب التأطير : $a < b < 0$

و بالتالي النهاية تصبح :

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2}\right) = \lim_{b\to 0}\left(\frac{-2}{1+2b}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$

■ (I) (3) أ

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$.

و لدينا : $f'(x) = \left(\frac{\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}}$$

■ (I) (3) ب

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا كذلك $g'(x) = 2 - \left(2\ln(1+2x) + \frac{2(1+2x)}{(1+2x)}\right)$

$$= -2\ln(1+2x)$$

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

و لدينا : $\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= -1 - \lim_{x\to\frac{-1}{2}^+}(1+2x)\, ln(1+2x)$$

$$= -1 - \lim_{\substack{u\to 0^+\\ u=1+2x}} u\, ln(u)$$

$$= -1 - 0$$

$$= \boxed{-1}$$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2\right)\ln(1+2x)\right)$$

$$= (+\infty)(-\infty)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي .

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-1	↗	0	↘	$-\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية

إذن : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ g(x) \le 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall\, x\, \epsilon\, I \setminus \{0\}\ ;\ g(x) < 0}$

■(I) 3 ج

لدينا : $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هو ما نلخصه في الجدول التالي :

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	
$(1+2x)$	0	$+$	1	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↘	0

■(I) 4 أ

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u\to0^+\\u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = \frac{2(-\infty)}{(-1)} = +\infty$$

$\boxed{\text{إذن المستقيم ذو المعادلة } x = \frac{-1}{2} \text{ مقارب عمودي للمنحنى } (\mathscr{C})}$

لدينا كذلك : $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{u\to+\infty\\u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty} 2\underbrace{\left(\frac{\ln u}{u}\right)}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{u}{u-1}\right)}_{\to 1} = 0$$

$\boxed{\text{إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى } (\mathscr{C}) \text{ بجوار } +\infty \text{ .}}$

■(I) 4 ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

إذن f متصلة و تناقصية قطعا على $[1;2]$ لأن : $[1;2] \subset \left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

و منه f تقابل من $[1;2]$ نحو صورته $[f(2);f(1)]$

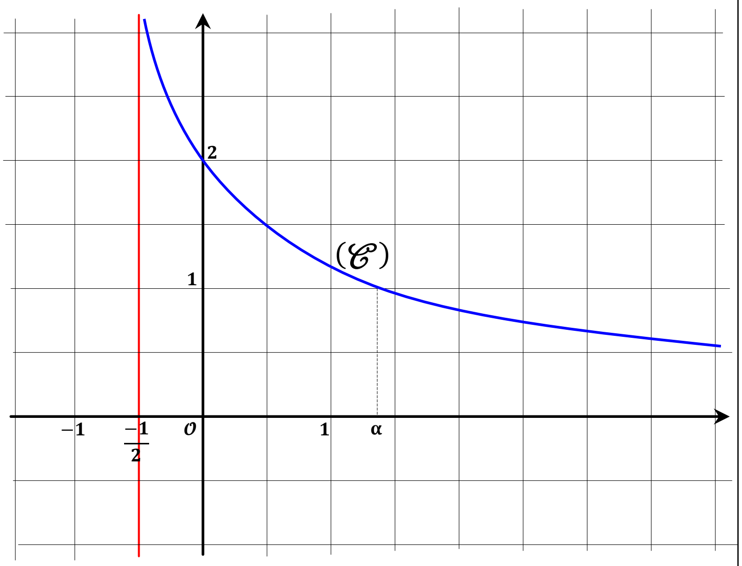
يعني f تقابل من $[1;2]$ نحو $[0{,}8\ ;\ 1{,}1]$

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0{,}8\ ;\ 1{,}1]$

فإنه يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f من المجال $[1;2]$

أو بتعبير رياضياتي جميل : $\boxed{\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [1;2]\ :\ f(\alpha) = 1}$

■(I) 4 ج



■(II) 1 أ

الدالة φ عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على I

إذن φ قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا : $$\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

لدينا من أجل : $x \ge 1$: $6 \le 2+4x$

$$\Leftrightarrow\ 6 \le 2(1+2x)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{1+2x} \le \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\varphi'(x) \le \frac{2}{3}}\ (1)$$

و لدينا كذلك : $x\epsilon I$ إذن : $x > \frac{-1}{2}$

و منه : $1+2x > 0$ إذن : $\frac{2}{1+2x} > 0$

يعني : $\boxed{\varphi'(x) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \ge 1)\ ;\ 0 < \varphi'(x) \le \frac{2}{3}}$$

■(II)(1)(ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال ■(I)(4)(ب) : $f(\alpha)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$$
$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha)=\alpha$$

و لدينا : $\varphi'(x)=\dfrac{2}{1+2x}>0$ إذن : φ دالة تزايدية قطعا على I

و منه : $\varphi([1;\alpha])=[\varphi(1)\,;\,\varphi(\alpha)]=[\ln 3\ ;\ \alpha]$

و لدينا : $[\ln 3\,;\,\alpha]\approx[1{,}1\ ;\ \alpha]\subset[1;\alpha]$

إذن : $\boxed{\varphi(J)\subset J}$

■(II)(2)(أ)

باستعمال البرهان بالترجع

لدينا : من أجل $n=0$: $u_0=1\,\epsilon\,[1;\alpha]=J$

نفترض أنه : $(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n\,\epsilon\,J$

إذن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,\varphi(J)$

و بما أن : $\varphi(J)\subset J$ فإن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,J$

يعني : $\ln(1+2u_n)\,\epsilon\,J$ و منه : $u_{n+1}\,\epsilon\,J$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n\,\epsilon\,J}$

■(II)(2)(ب)

لدينا الدالة φ قابلة للإستقاق على المجال I

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α .

إذن : يوجد c محصور بين u_n و α بحيث : $\boxed{\dfrac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}=\varphi'(c)}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|\varphi'(c)|$$
$$\Rightarrow |\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(c)||u_n-\alpha|$$

لدينا حسب السؤال : ■(II)(1)(أ)

$$\boxed{(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}}$$

و بما أن : $u_n\geq 1$ (لأن : $u_n\,\epsilon\,J$)

فإن : $c>u_n\geq 1$ يعني : $c\geq 1$

و منه : $0<\varphi'(c)\leq\frac{2}{3}$

يعني : $|\varphi'(c)|\leq\frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n-\alpha|$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow |\varphi'(c)||u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$
$$\Leftrightarrow |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$

و من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\Leftrightarrow |u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_{n-1}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-2}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-3}-\alpha|$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|$$

إذن : $\boxed{|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|}$ (3)

من جهة أخرى لدينا : $\alpha>0$ يعني : $-\alpha<0$

أي : $1-\alpha<1$ و منه : $|1-\alpha|<1$

أي : $|u_0-\alpha|<1$

و منه : $\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

■(II)(2)(ب)

بما أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(لأنها متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1)

إذن : $\lim\limits_{n\infty}|u_n-\alpha|=0$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}u_n=\alpha}$

■(III)①أ

لدينا حسب الأسئلة السابقة : f دالة متصلة على I .

إذن f متصلة على أي مجال على شكل $[0,x]$ بحيث : $x \in I$

و منه f تقبل دالة أصلية F بحيث : $F'(x) = f(x)$

و منه : F قابلة للإشتقاق على المجال I .

■(III)①ب

نعلم أن : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ f(x) > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ F'(x) > 0$

و منه F دالة تزايدية قطعا على I

■(III)②أ

لدينا : $(*)\ \boxed{(\forall\, t \geq 1)\ ;\ \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}}$

و لدينا : $(\forall t \geq 1)\ ;\ 2t+1 \geq 3 > 1$

إذن : $(\forall t \geq 1)\ ;\ \ln(2t+1) > 0$

نضرب طرفي المتفاوتة $(*)$ في العدد الموجب $\ln(2t+1)$ نحصل على :

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t}\right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt} \quad (\star)$$

لدينا f متصلة على $[0;1]$

إذن التكامل : $\int_1^x f(x)\, dt$ يُعَبِّر عن قياس لمساحة موجبة

أي : $\int_1^x f(x)\, dt \geq 0$ و منه : $-\int_1^x f(x)\, dt \leq 0$

يعني : $\boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \leq F(x)} \quad (\star\star)$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)②ب

لاحظ أن : $[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4\ln(1+2t)}{(1+2t)}$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}[(\ln(1+2t))^2]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)\right) = +\infty$

فإنه بالضرورة لدينا : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

و ذلك بسبب المتفاوتة التالية :

$$\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)③أ

نعتبر المجال $\left[\frac{-1}{2}\,;x\right]$ بحيث : $x \epsilon I$

لدينا : $\tilde{F}$ دالة معرفة و متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2}\,;x\right]$

لأن : F متصلة على I و F متصلة على اليمين في $\frac{-1}{2}$ حسب الإفتراض

و لدينا كذلك $\tilde{F}$ قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{-1}{2}\,;x\right[$ لأن : F قابلة للإشتقاق على I

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$

$$\boxed{\exists\, c\, \epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ (F(x) - \ell) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\#)$$

و لدينا من جهة أخرى : $c\, \epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[$ يعني : $x > c$

و منه : $f(x) < f(c)$ لأن f تناقصية .

إذن : $\left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) < \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c)$

و منه باستعمال النتيجة $(\#)$ نحصل على :

$$\boxed{(F(x) - \ell\,) \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (*)$$

■(III)③ب

المتفاوتة $(*)$ تصبح : $\left(\frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}}\right) \geq f(x)$

و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$

و بالتالي : F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في : $\frac{-1}{2}$