

الصفحة
1
4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2009  
الموضوع

المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
وتكوين الأطر  
والبحث العلمي  
المركز الوطني لتنظيم الامتحانات



C:RS24

9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك:

يسمح استعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة وحدتها المصفوفة  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  وأن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

لتكن  $V$  مجموعة المصفوفات  $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$  حيث  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1- بين أن  $V$  فضاء متجهي جزئي من  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  وحدد أساسا له . 0,75

2- بين أن  $V$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$  0,25

ب) بين أن  $(V, +, \times)$  حلقة واحدة تبادلية . 0,5

3- احسب  $M_{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \times M_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$  0,25

ب) هل الحلقة  $(V, +, \times)$  جسم؟ 0,25

4- لتكن  $X$  مصفوفة من  $V$  حيث  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$  مع  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

أ) بين أن :  $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$  حيث  $O$  هي المصفوفة المنعدمة . 0,5

ب) نفترض أن :  $a^2 - 4b^2 \neq 0$  0,5

بين أن المصفوفة  $X$  تقبل مقلوبا في  $V$  ينبغي تحديده .

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن  $u$  عددا عقديا يخالف  $(1-i)$

1) أ - أنشر  $(iu-1-i)^2$  0,25

ب - حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  : 0,75

$$z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر .

نعتبر النقط  $A((1+i)u-2i)$  و  $B((1-i)u+2)$  و  $U(u)$  و  $\Omega(2-2i)$

أ - حدد لحق النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  ثم حدد متجهة الإزاحة  $t$  التي تحول النقطة  $U$  إلى النقطة  $I$  0,5

ب - ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  . بين أن  $R(A) = B$  0,5

ج - استنتج أن $(\Omega I)$ و $(AB)$ متعامدان.	0,5
د - انطلاقا من النقطة $U$ وضح طريقة لإنشاء النقطتين $A$ و $B$	0,75
(3) نضع $u = a(1+i) - 2i$ حيث $(a \in \mathbb{R})$	
أ) حدد لحقي المتجهين $\overline{AB}$ و $\overline{AU}$ بدلالة $a$	0,5
ب) استنتج أن النقط $A$ و $B$ و $U$ مستقيمية.	0,25
<b>التمرين الثالث : (3 نقط)</b>	
$n$ عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .	
لدينا ثلاث صناديق $U_1$ و $U_2$ و $U_3$ .	
الصندوق $U_1$ يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.	
الصندوق $U_2$ يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.	
الصندوق $U_3$ يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.	
نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تائيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.	
ليكن $X$ المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.	
1- حدد قيم المتغير العشوائي $X$	0,25
2- أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$	0,75
ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	0,75
ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي $X$	0,5
3- علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق $U_3$ ؟	0,75
<b>مسألة: (10 نقط)</b>	
I - نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$	
1) أ - ادرس تغيرات الدالة $g$	0,5
ب - ضع جدول تغيرات الدالة $g$	0,5
2) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[\ln 4, \ln 6]$	0,5
( نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$ )	
ب - ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$	0,5
3) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	
أ - بين أن $1 \leq u_n < \alpha$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	0,5
ب - بين أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	0,25

ج - بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تزايدية قطعا . 0,25

د - بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متقاربة ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  0,5

II - نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$   
 و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  1

(2) أ - تحقق أن :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$  0,5

ب - بين أن  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0,75

(3) أنشئ  $(C)$  (ناخذ  $\alpha \approx 1,5$ ) 0,5

III - نعتبر الدالة العددية  $F$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \quad \text{و} \quad F(0) = -\ln 2$$

(1) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن :  $(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  0,5

ب - بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$  0,5

ج - احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  ثم استنتج أن الدالة  $F$  متصلة على اليمين في الصفر . 0,5

(2) أ - بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$  0,25

ب - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  0,25

(3) بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  وأن :  $(\forall x > 0) \quad F'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x-1}{x} \right)^2$  0,5

(4) أ- ليكن  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$ .

بين أنه يوجد  $c$  من المجال  $]0, x[$  بحيث:  $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$  (يمكنك استعمال مبرهنة

التزايدات المنتهية مرتين)

ب- أثبت أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$  0,25

ج- استنتج أن  $F$  قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن  $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$  0,25

التمرين الأول: (3 نقطه)

تذكير:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ حلقة واحدة وحدتها المصفوفة } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \quad \checkmark$$

$$\text{فضاء متجهي حقيقي. } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot) \quad \checkmark$$

$$V = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ نضع}$$

1. (\*) لدينا :

$$O = M_{(0,0)} \in V \text{ لأن } V \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$$V \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \checkmark$$

$$\checkmark \text{ لكل عنصرين } M_{(a,b)} \text{ و } M_{(c,d)} \text{ من } V \text{ ولكل } (\alpha, \beta) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ ، لدينا :}$$

$$\alpha M_{(a,b)} + \beta M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ 4(\alpha b + \beta d) & \alpha a + \beta c \end{pmatrix} = M_{(\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)} \in V$$

$$\text{ومنه فإن } V \text{ فضاء متجهي جزئي من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

$$(*) \text{ لكل عنصر } M_{(a,b)} \text{ من } V \text{ ، لدينا : } M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ \text{ حيث :}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{(1,0)} \in V \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = M_{(0,4)} \in V \text{ إذن } (I, J) \text{ أسرة مولدة للفضاء } V$$

$$\text{لكل } (\alpha, \beta) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ ، لدينا : } \alpha I + \beta J = O \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 4\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ إذن أسرة حرة}$$

$$\text{في } V \text{ . وبالتالي فإن } (I, J) \text{ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي } (V, +, \cdot) \text{ . (بعده } \dim V = 2 \text{)}$$

$$2. \text{ أ- ليكن } M_{(a,b)} \text{ و } M_{(c,d)} \text{ عنصران من } V \text{ لدينا :}$$

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ 4d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 4bd & ad + bc \\ 4(ad + bc) & ac + 4bd \end{pmatrix} = M_{(ac+4bd, ad+bc)} \in V$$

$$\text{إذن } V \text{ جزء مستقر من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$$

2. ب- لدينا :

$$\checkmark \text{ فضاء متجهي حقيقي. إذن } (V, +, \cdot) \text{ زمرة تبادلية.}$$

$$\checkmark \text{ حلقة } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ ، إذن } \times \text{ تجميعي وتوزيحي على } + \text{ في } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ و بما أن } V \text{ جزء مستقر من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times) \text{ ،}$$

$$\text{فإن } \times \text{ تجميعي وتوزيحي على } + \text{ في } V$$

$$\checkmark \text{ هي وحدة الحلقة } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ و } I = M_{(1,0)} \in V \text{ ، إذن } I \text{ هي وحدة } V$$

$$.V \text{ إذن } \times \text{ قانون تبادلي في } V. M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(ac+4bd, ad+bc)} = M_{(ca+4db, da+cb)} = M_{(c,d)} \times M_{(a,b)} \quad \checkmark$$

خلاصة : (V, +, ×) حلقة واحدة تبادلية.

$$.3 \text{ أ- لدينا : } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} = M_{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 4 \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2}\right)} = M_{(0,0)} = O$$

$$\text{ب- لدينا : } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} = O \text{ و } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \neq O \text{ و } M_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} \neq O$$

قواسم الصفر ، ومنه فإن الحلقة (V, +, ×) ليست جسما.

$$.4 \text{ لتكن } X \text{ مصفوفة من } V \text{ حيث } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \text{ مع } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \text{أ- لدينا : } X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I &= M_{(a,b)}^2 - 2aM_{(a,b)} + (a^2 - 4b^2)M_{(1,0)} \\ &= M_{(a^2+4b^2, 2ab)} - M_{(2a^2, 2ab)} + M_{(a^2-4b^2, 0)} \\ &= M_{(0,0)} \\ &= O \end{aligned}$$

$$\text{ب- نفترض أن } a^2 - 4b^2 \neq 0 \text{ إذن : } \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X)X = I$$

$$\cdot \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X) = \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aM_{(1,0)} - M_{(a,b)}) = M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)} \in V \text{ ولدينا :}$$

$$\cdot X^{-1} = \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X) = M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)} \text{ : إذن } X \text{ تقبل مقلوبا في } (V, +, \times) \text{ هو :}$$

### التسريث الثاني :

ليكن  $u$  عددا عقديا مخالفا للعدد  $1-i$ .

$$.1 \text{ أ- } (iu - 1 - i)^2 = -u^2 + 2(1-i)u + 2i$$

$$\text{ب- نعتبر في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0 \text{ (*)}$$

لنحسب المميز المختصر للمعادلة (\*). حسب السؤال أعلاه ، لدينا :

$$\Delta' = (u+1-i)^2 - (2u^2 - 4i) = -u^2 + 2(1-i)u + 2i = (iu - 1 - i)^2$$

$$z_1 = u + 1 - i + iu - 1 - i = \boxed{(1+i)u - 2i} \text{ : إذن للمعادلة (*) حلين مختلفين هما :}$$

$$z_2 = u + 1 - i - iu + 1 + i = \boxed{2 + (1-i)u} \text{ و}$$

$$\cdot S = \left\{ (1+i)u - 2i, 2 + (1-i)u \right\} \text{ هي : (*) المعادلة حلول المعادلة (*)}$$

$$.2 \text{ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر ، نعتبر النقط } A \left( (1+i)u - 2i \right) \text{ و } B \left( (1-i)u + 2 \right) \text{ و } U(u)$$

$$\text{ و } \Omega(2-2i)$$

$$\text{أ- لدينا } I \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ . إذن لحق النقطة } I \text{ هو :}$$



$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(1+i)u - 2i + (1-i)u + 2}{2} = \boxed{1-i+u}$$

$t$  هي الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}$  التي تحول النقطة  $U$  إلى النقطة  $I$ . لنحدد لاحق المتجهة  $\vec{u}$ . لدينا :

$$\vec{u}(1, -1) : \text{إذن } z_{\vec{u}} = z_I - z_U = 1-i+u - u = \boxed{1-i}$$

ب- الكتابة العقدية للدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega(2-2i)$  وزاويته  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  هي :  $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)z_{\Omega}$  أي :

$$z' = -iz + (1+i)(2-2i) \text{ يكافئ } \boxed{z' = -iz + 4}$$

$$\text{وبما أن } \boxed{R(A) = B} \text{ فإن } -iz_A + 4 = -i((1+i)u - 2i) + 4 = (1-i)u + 2 = z_B$$

ج- لدينا  $R\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)(A) = B$ . إذن :  $\left(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  و  $\Omega A = \Omega B$  . ومنه فإن  $\Omega AB$  مثلث قائم

الزاوية في  $\Omega$  ولدينا  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  .  $\boxed{(\Omega I) \perp (AB)}$  .

د- إنشاء النقطتين  $A$  و  $B$  انطلاقا من النقطة  $U$  :

✓ لدينا :  $t(U) = I$  ، هكذا ننشئ النقطة  $I$  بحيث :  $\overline{UI} = \vec{u}$  .

✓ بما أن  $(\Omega I) \perp (AB)$  ، فإن النقطتين  $A$  و  $B$  تنتميان إلى المستقيم  $(\Delta)$  المار من النقطة  $I$  و العمودي على المستقيم

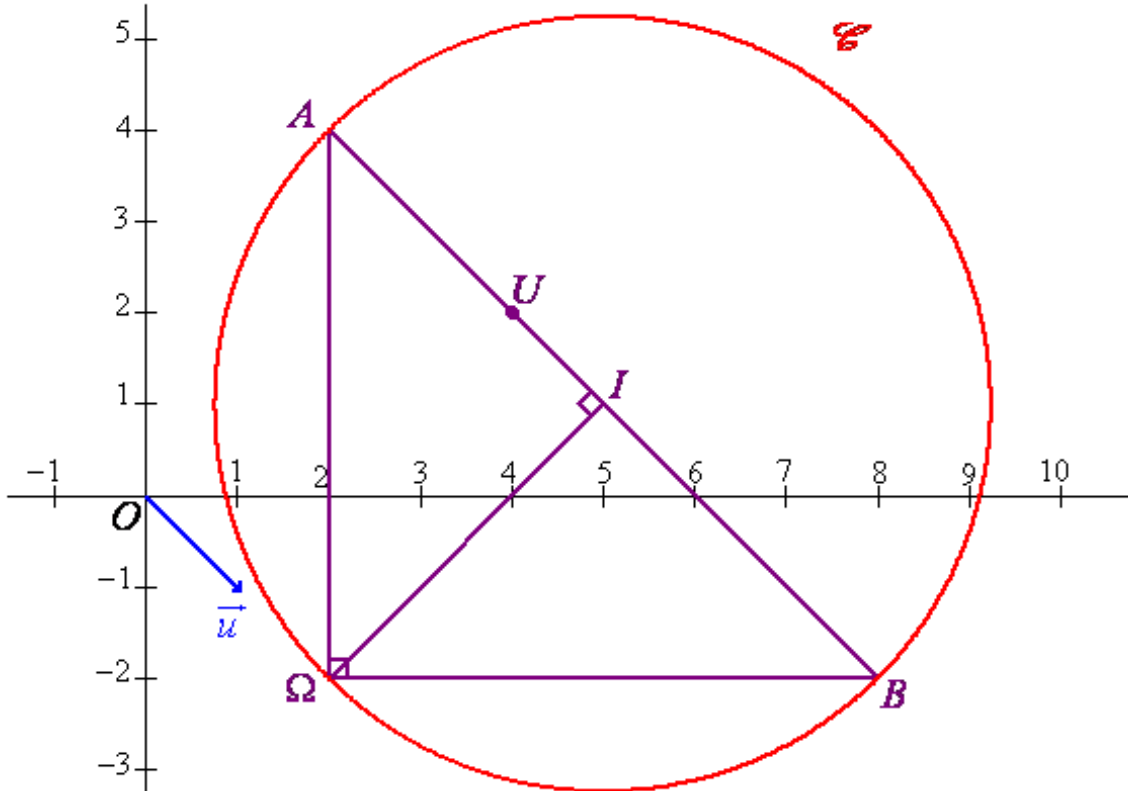
$(\Omega I)$  .

✓ بما أن  $\Omega AB$  مثلث قائم الزاوية في  $\Omega$  و  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  ، فإن  $I$  هو مركز الدائرة  $\mathcal{C}$  المحيطة بالمثلث

$\Omega AB$  . إذن  $A$  و  $B$  همل نقطتي تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  والدائرة  $\mathcal{C}$  . ويتم اختيار النقطتين  $A$  و  $B$  بحيث يكون  $\Omega AB$

مثلثا غير مباشر  $\left(\left(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]\right)$

إنشاء الشكل في حالة  $U(4+2i)$  :



3. نضع :  $u = a(1+i) - 2i$  حيث  $(a \in \mathbb{R})$ .

أ- لنحدد لحقي المتجهتين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AU}$  بدلالة  $a$  :

$$\text{Aff}(\overline{AB}) = z_B - z_A = (1-i)u + 2 - (1+i)u + 2i = \boxed{2(1-i)(a-1)}$$

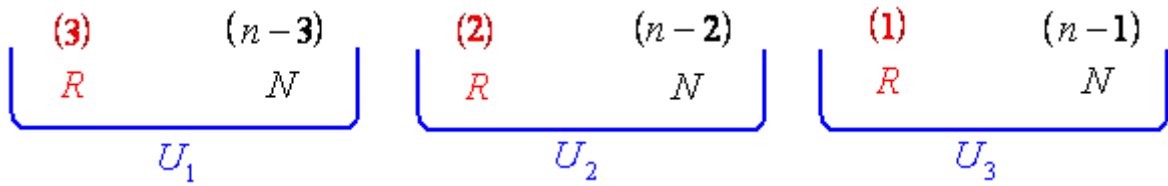
$$\text{Aff}(\overline{AU}) = z_U - z_A = a(1+i) - 2i - (1+i)u + 2i = \boxed{(1-i)(a-2)}$$

ب- بما أن  $u \neq 1-i$  ، فإن :  $a \neq 1$  . إذن :  $\text{Aff}(\overline{AU}) = \text{Aff}\left(\frac{a-2}{2(a-1)}\overline{AB}\right)$  ، ومنه فإن :

$$\overline{AU} = \frac{a-2}{2(a-1)}\overline{AB}$$

**التمرين الثالث :**

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 4$ .



نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ثم نسحب تائيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار. ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1. القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي 0 و 1 و 2 ولدينا مجموعة القيم كما يلي :  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

2. نعتبر الأحداث التالية :  $A_i$  : « اختيار الصندوق  $U_i$  » ، حيث  $1 \leq i \leq 3$ .

لدينا  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  أحداث غير منسجمة مثنى مثنى واتحادهما  $\Omega$  ، فهي تكون تجزيئا للفضاء  $\Omega$  .  
حسب صيغة الاحتمالات الكلية ، لدينا :

$$\begin{aligned} p(X=2) &= p(A_1)p_{A_1}(X=2) + p(A_2)p_{A_2}(X=2) + p(A_3)p_{A_3}(X=2) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} ; C_2^2 = 1 ; C_3^2 = 3$$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(A_1)p_{A_1}(X=1) + p(A_2)p_{A_2}(X=1) + p(A_3)p_{A_3}(X=1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{C_1^1 C_{n-1}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1 C_{n-2}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 C_{n-3}^1}{C_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} ; C_{n-1}^1 = n-1 ; C_{n-2}^1 = n-2 ; C_1^1 = 1 ; C_2^1 = 2 ; C_3^1 = 3$$



$$p(X=0) = 1 - p(X=1) - p(X=2) = 1 - \frac{8}{3n(n-1)} - \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} = \frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}$$

ومنه نستنتج قانون احتمال  $X$  كما يلي :

قيم $X$ : $x_k$	0	1	2
$p_k = p(X=x_k)$	$\frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}$	$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق  $U_3$  هو :  $p_{(X=2)}(A_3)$

حسب صيغة الاحتمالات المركبة ، لدينا :

$$p(X=2)p_{(X=2)}(A_3) = p(A_3)p_{A_3}(X=2) \Rightarrow \frac{8}{3n(n-1)}p_{(X=2)}(A_3) = \frac{1}{3} \frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\Rightarrow p_{(X=2)}(A_3) = \frac{3}{4}$$

**المسألة :**

1. لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  ،  $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

1. أ- لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$  ، لدينا :  $g'(x) = 2(1 - e^{-x})' - x' = 2e^{-x} - 1$  ، ولدينا :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln 2$$

إذن :  $\forall x \in [0, \ln 2]$  ،  $g'(x) \geq 0$  و  $\forall x \in [\ln 2, +\infty[$  ،  $g'(x) \leq 0$

ب- تغيرات الدالة  $g$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(1 - e^{-x}) - x = -\infty$  ، لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  . إذن :

$x$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$1 - \ln 2$	$-\infty$

2. أ- بما أن  $g$  دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال  $[\ln 4, \ln 6]$  و  $g(\ln 4) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0,1$  و  $g(\ln 6) = \frac{5}{3} - \ln 6 = \frac{5}{3} - \ln 3 - \ln 2 \approx -0,14$

، فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة ، المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[\ln 4, \ln 6]$  .

ب-  $g$  دالة تناقصية على المجال  $[\ln 2, +\infty[$  . إذن :  $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$  ،  $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$

و  $\forall x \in [\ln 2, \alpha[$  ،  $x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) > 0$

$\forall x \in ]0, \ln 2]$  ,  $\ln 2 \geq x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$  : إذن  $[0, \ln 2]$  المجال على  $g$  دالة تزايدية على المجال  
 خلاصة :  $g(0) = g(\alpha) = 0$  و  $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$  ,  $g(x) < 0$  و  $\forall x \in ]0, \alpha[$  ,  $g(x) > 0$   
 3. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- لدينا :

✓ من أجل  $n = 0$  ,  $u_0 = 1$  , إذن  $1 \leq u_0 < \alpha$  , لأن  $1 = \ln e < \ln 4 < \alpha$  .

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . نفترض أن  $1 \leq u_n < \alpha$  ونبين أن  $1 \leq u_{n+1} < \alpha$  :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < \alpha &\Rightarrow -\alpha < -u_n \leq -1 \\ &\Rightarrow e^{-\alpha} < e^{-u_n} \leq e^{-1} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-u_n} < 1 - e^{-\alpha} \\ &\Rightarrow 2(1 - e^{-1}) \leq 2(1 - e^{-u_n}) < 2(1 - e^{-\alpha}) \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha \end{aligned}$$

لأن :  $g(1) \geq 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-1}) \geq 1$  و  $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-\alpha}) - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha}$

✓ خلاصة :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $1 \leq u_n < \alpha$

ب- ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . لدينا :  $u_{n+1} - u_n = 2(1 - e^{-u_n}) - u_n = g(u_n)$

ج- ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . لدينا :  $u_n \in [1, \alpha[$  . إذن  $g(u_n) > 0$  , ومنه فإن :  $u_{n+1} - u_n > 0$  . وهذا يعني أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية.

د- لدينا :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد  $\alpha$  . إذن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة نهايتها  $l$  ينبغي تحديدها ؟

نضع :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  ,  $h(x) = 2(1 - e^{-x})$  . لدينا :

✓  $h$  دالة متصلة على المجال  $[1, \alpha]$  .

✓  $\forall x \in [1, \alpha]$  ,  $h'(x) = 2(1 - e^{-x})' = 2e^{-x} > 0$  . إذن  $h$  تزايدية قطعاً على  $[1, \alpha]$  , ومنه فإن :

$g(1) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq h(1)$  ,  $h(\alpha) = \alpha$  : لأن  $h([1, \alpha]) = [h(1), h(\alpha)] \subset [1, \alpha]$

✓  $u_0 = 1 \in [1, \alpha]$

✓  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة نهايتها  $l$  .

إذن :  $h(l) = l$  و  $l \in [1, \alpha]$  . حسب السؤال 2.ب . لدينا :  $l = \alpha$  .

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$$

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$

1. حساب نهايات :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} (e^{-x} - 1) = \boxed{-\infty}$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{x} \right) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \left( \frac{-1}{x} \right) = \boxed{-\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty : \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} (e^{-x} - 1) = \boxed{-\infty}$$

$$2. \text{أ- نعلم أن} : g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(1-e^{-\alpha}) = \alpha \Rightarrow e^{\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha} \Rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) e^{\alpha} = 1 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{1-\frac{2}{2-\alpha}}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2(2-\alpha)} = \boxed{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}}$$

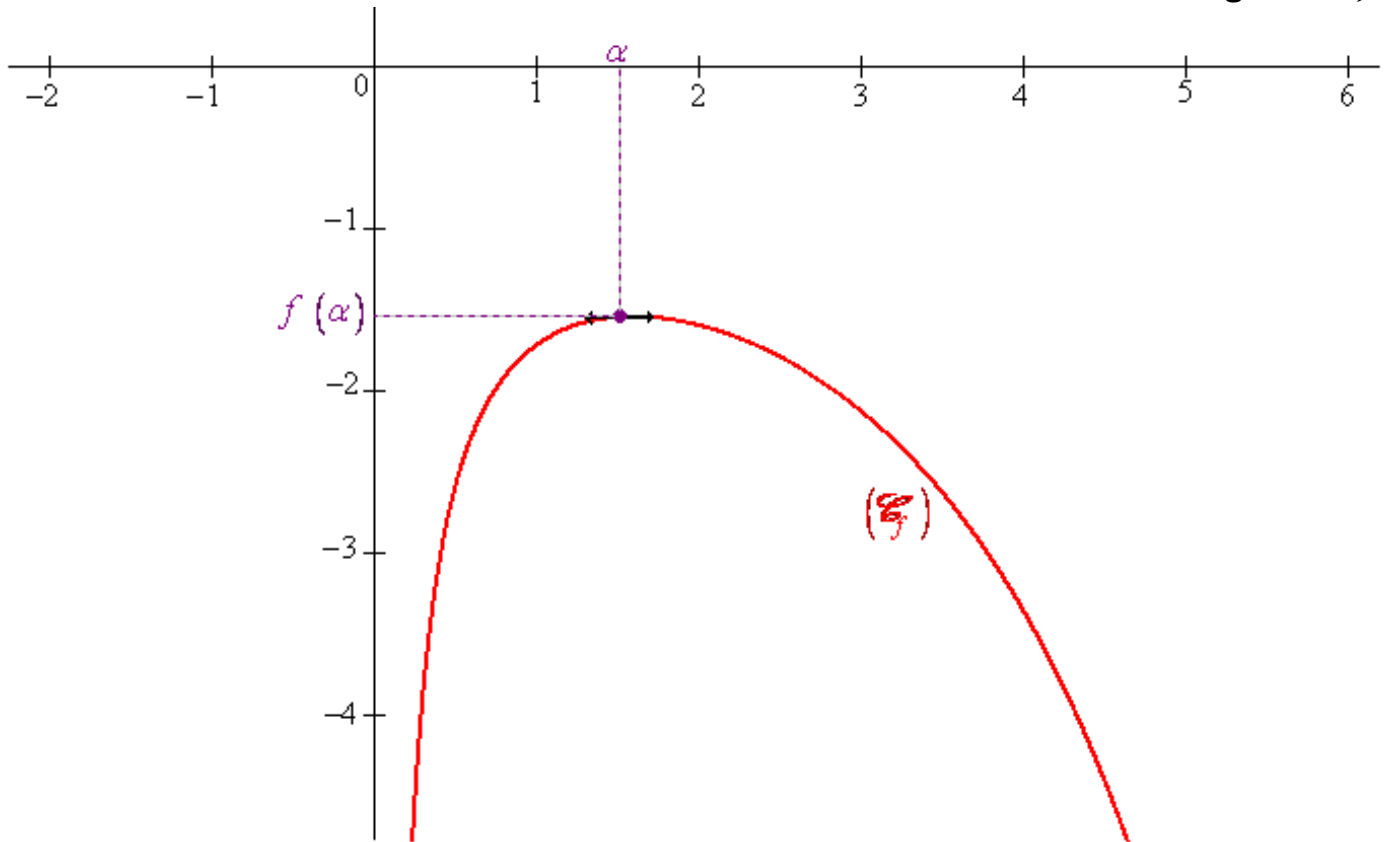
ب- ليكن  $x \in \mathbb{R}_+^*$  لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)' = \frac{-e^x x^2 - 2x(1-e^x)}{x^2} = \frac{e^x(-x - 2(e^{-x} - 1))}{x^3} = \boxed{\frac{e^x g(x)}{x^3}}$$

إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}_+^*$  هي إشارة  $g(x)$  ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	
			$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	
	$-\infty$			$-\infty$

3. إنشاء المنحنى  $\mathcal{C}$  :



III. نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt, & x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$$

1. أ- ليكن  $x > 0$ . لدينا :  $u : t \mapsto 1-e^t$  و  $v : t \mapsto \frac{-1}{t}$  دالتان متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  و

$u' : t \mapsto -e^t$  و  $v' : t \mapsto \frac{1}{t^2}$  دالتان متصلتان على المجال  $]0, +\infty[$ . إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = \int_x^{2x} (1-e^t) \left( -\frac{1}{t} \right)' dt = \left[ \frac{e^t-1}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

$$F(x) = \boxed{\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt}$$

ب- لكل  $x > 0$  ولكل  $t \in [x, 2x]$  لدينا :  $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$   $\Rightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \Rightarrow x \leq t \leq 2x$

إذن :  $e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$  أي :  $\boxed{e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2}$  ، لأن :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$$

ج- بما أن  $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$  و  $\forall x \in ]0, +\infty[ : e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$  ،  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x \ln 2 = \ln 2$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$  ،

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2}$$
 : فإن

استنتاج :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = -\ln 2 = F(0)$  ، لأن :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$$

ومنه نستنتج أن دالة متصلة على اليمين في الصفر.

2. أ- ليكن  $x > 0$  و  $t \in [x, 2x]$  لدينا :

$$x \leq t \leq 2x \Rightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x}$$

$$\Rightarrow 1-e^t \leq 1-e^x$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^t}{t^2} \leq \frac{1-e^x}{t^2}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1-e^x) \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1-e^x) \left[ \frac{-1}{t} \right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$$

ومنه فإن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ : F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$

2. ب- بما أن  $\forall x \in ]0, +\infty[ : F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} (e^{-x} - 1) = -\infty$  ، لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \boxed{-\infty} \text{ ، فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3. لدينا  $t \mapsto \frac{1-e^t}{t^2}$  دالة متصلة على المجال  $]0, +\infty[$  ، إذن فهي تقبل دالة أصلية  $\varphi$  على المجال  $]0, +\infty[$  ولدينا :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ : F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = \left[ \varphi(t) \right]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

نعلم أن  $\varphi$  و  $w : x \mapsto 2x$  دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  ، إذن  $x \mapsto \varphi(2x)$  قابلة للاشتقاق على المجال

$]0, +\infty[$  ، وعليه فإن  $F$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  ، ولكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  ، لدينا :

$$F'(x) = \left( \varphi(2x) - \varphi(x) \right)' = (2x)' \varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2 \frac{1-e^{2x}}{4x^2} - \frac{1-e^x}{x^2} F'(x) = \boxed{-\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^2}$$

4. أ- ليكن  $x > 0$

✓  $F$  دالة متصلة على المجال  $[0, x]$  وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0, x[$  . حسب مبرهنة التزايديات المنتهية ، لدينا :

$$\exists \beta \in ]0, x[ / F(x) - F(0) = F'(\beta)(x - 0)$$

$$\text{أي : } \exists \beta \in ]0, x[ / F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^\beta - 1}{\beta} \right) x$$

✓  $\exp$  دالة متصلة على المجال  $[0, \beta]$  وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0, \beta[$  . حسب مبرهنة التزايديات المنتهية ، لدينا :

$$\exists c \in ]0, \beta[ / e^\beta - 1 = e^c \beta : \text{أي } \exists c \in ]0, \beta[ / \exp(\beta) - \exp(0) = \exp'(c)(\beta - 0)$$

$$\text{وبالتالي فإن : } \exists c \in ]0, x[ / F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2c}$$

ب- لدينا :

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < 2c < 2x$$

$$\Rightarrow 1 < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{2x} < -\frac{1}{2} e^{2c} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in ]0, +\infty[ : -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{ج- بما أن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ و } \forall x \in ]0, +\infty[ : -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{1}{2} \text{ ، فإن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2} e^{2x} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن  $F$  دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ولدينا :  $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$

### إضافات :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$  و  $\forall x \in ]0, +\infty[ : \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1-e^x}{2x^2}$

لأن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x^2} (e^{-x} - 1) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$  . ومنه فإن المنحنى  $\mathcal{C}_F$  يقبل فرعاً شلجيمياً بجوار  $+\infty$  اتجاهه محور الأرتيب .

جدول تغيرات الدالة  $F$  :

$x$	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-
$F(x)$	$-\ln 2$	$-\infty$

إنشاء المنحنى  $\mathcal{C}_F$  :

