المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة الاستدراكيـــة 2013

مـــادة الريـــــاضيات
شعبة العلـوم الرياضية أ و ب
المعـــامل: 9
مدة الانجـاز : أربع ساعــات

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

I 1 بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G . — 0,50 ن

I 2 نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

I 2 أ بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$. — 0,75 ن

I 2 ب استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . — 0,50 ن

II نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II 1 أ تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ — 0,50 ن

II 1 ب تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A+I) = I$.

ثم استنتج أن المصفوفة $(A+I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده . — 0,50 ن

II 2 لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$. — 0,75 ن

و نعتبر المجموعة : $E = \{ \ M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

I 1 حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . — 1,00 ن

I 2 أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . — 0,50 ن

II ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

$N = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء $\}$.

$R = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء $\}$.

$E = \{$ جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء $\}$.

0,50 ن | II 1 | بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0,50 ن | II 2 | أحسب $p(E)$

0,50 ن | II 3 | أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق .

التمرين الثالث : (3,5ن)

I | ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

0,50 ن | I 1 | بين أن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلي المعادلة (E) .

I 2 | نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$.

0,50 ن | I 2 أ | بين أن : $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

1,00 ن | I 2 ب | استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 .

II | المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

0,50 ن | II 1 | حدد لحقي كل من J و K منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a .

0,50 ن | II 2 | ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

0,50 ن | II 3 | أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع : (8,25 ن)

1 | لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن | 1 أ | بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن | 1 ب | أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$)

0,50 ن | 1 ج | بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ :

$$(\forall x > 0) \ ; \ f'(x) = \frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

0,50 ن | 1 د | ضع جدول تغيرات الدالة f .

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathscr{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,25 ن | 2 | أ | حدد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$.

0,50 ن | 2 | ب | بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t$

0,75 ن | 2 | ج | بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\displaystyle\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$

0,50 ن | 2 | د | استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

0,50 ن | 2 | هـ | بين أن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما .

1,00 ن | 2 | ز | أنشئ $(\mathscr{C}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1)\approx 0{,}5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}4$)

3 | لكل x من المجال $[0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=x-F(x)$.

0,75 ن | 3 | أ | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ .

0,50 ن | 3 | ب | بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن | 3 | ج | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n\geq n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\infty}\alpha_n$

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ 0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0,50 ن | 4 | ب | أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$

التمرين الخامس : (1,75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\left(\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

0,25 ن | 1 | تحقق أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ v_n=n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]$

0,50 ن | 2 | باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$(\forall n\geq 1),(\exists\, c\,\epsilon\,]\,n\,;n+1\,[\,)\ ;\ v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$$

0,50 ن | 3 | بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ \dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{(1+(1+n)^2)arctan(n+1)}$

0,50 ن | 4 | أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}u_n$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

I 1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x*y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1 \quad \text{و} \quad x*y < 2$$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} < 2}$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \alpha+\beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

إلى العمل : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$.

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$.

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$.

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)$
$> (x-1)(y-1)+(x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نحصل على : $\frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y < 2}$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1)+2(x-2)(y-2)$
$> (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)]$
$> (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نجد : $2 > \frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

يعني : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 2 > x*y}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x*y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y \in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 أ

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

$$\begin{array}{llll} f : & (\mathbb{R}_+^*,\times) & \longmapsto & (G,*) \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}$$

لكي يكون التطبيق f تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$\forall \, x,y \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f(x \times y) = f(x) * f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right) * \left(\frac{y+2}{y+1}\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

إذن : $\boxed{f(x) * f(y) = f(x \times y)}$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$(\forall y \in G) , (\exists! \, x \in \mathbb{R}_+^*) \; : \; f(x) = y$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصرا من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$.

هذه المعادلة تصبح : $\frac{x+2}{x+1} = y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2) = y(x+1)$

يعني : $x+2 = xy+y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\frac{1}{1-y}$

نجد : $x = \frac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر y' يحقق $x = \frac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$

أي : $(y-y')=0$ أي : $y=y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(y-2)<0$

و لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(1-y)<0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

إذن : $(\forall y\in G) , \left(\exists ! \, x = \dfrac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*\right) \; : \; f(x)=y$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

I 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في F .

إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f \; : \; (\mathbb{R}_+^*,\times) \longmapsto (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x\in G) \; ; \; x*\frac{3}{2} = \frac{3}{2}*x = x$$

II 1 أ

تذكير : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .

نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists \, y \in E\setminus\{e\} \; ; \; x\top y = y \top x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لدينا :
$$\begin{aligned} A^3 &= A\times A\times A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3 = \mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A \neq \mathcal{O}$

و لدينا : $A^3 = A\times A^2 = \mathcal{O}$

مع : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A\neq\mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف $\mathcal{O}$

و تحقق $A\times A^2 = A^2\times A = \mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

II 1 ب

$$\begin{aligned} (A^2-A+I)\times(A+I) &= A^3+A^2-A^2-A+A+I \\ &= A^3+I = \mathcal{O}+I = I \end{aligned}$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة (A^2-A+I) عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A+I)\times(A^2-A+I) = (A^2-A+I)\times(A+I) = I$

و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة (A^2-A+I) .

و لدينا : $(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} (A^2-A+I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II 2

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x \\ (\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x) \\ 1\cdot x=x \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \forall\, x,y\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$

و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من E .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= aI+bA-cI-dA \\ &= (a-c)I+(b-d)A \\ &= M(\,a-c\;;b-d\,)\in E \end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$

و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+)\text{ زمرة تبادلية}}$ $\mathbf{(1)}$

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$

و ذلك لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\,,\forall\alpha\in\mathbb{R}\;;\;\; \alpha\cdot M(a,b)=M(\alpha a,\alpha b)\in E$

إذن :
$$\boxed{\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B \\ (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A \\ (\alpha\times\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A) \\ 1\cdot A=A \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \forall\, A,B\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix}} \;\; \mathbf{(2)}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نعتبر الأسرة (I,A) .

من الواضح أن الأسرة (I,A) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\;;\;\; M(a,b)=aI+bA$

يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و A

لنبين الآن أن الأسرة (I,A) حرة .

من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a\cdot I+b\cdot A=\mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&0&0\\0&a&0\\0&0&a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

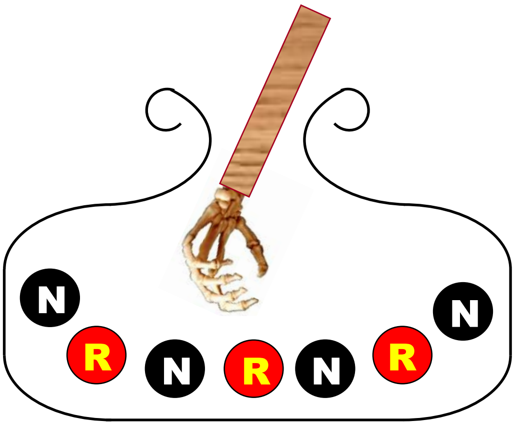
$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

إذن الأسرة (I,A) حرة .

و بما أن (I,A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

التمريـن الثانـي

I 1



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل 7^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $\quad card(\Omega)=7^4=2401$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $\quad X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} &\longmapsto [0,1] \\ k &\longmapsto P_X(k)=p[X=k] \end{aligned}$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

لنحسب : $p[X=0]$

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 امكانية لسحب الكرات الأربع .

إذن : $\quad \boxed{p[X=0]=\dfrac{3^4}{7^4}=\dfrac{81}{2401}}$

لنحسب : $p[X=1]$

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

إذن : $\quad \boxed{p[X=1]=\dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4}=\dfrac{432}{2401}}$

لنحسب : $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .

C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .

3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

إذن : $\quad \boxed{p[X=2]=\dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4}=\dfrac{864}{2401}}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $\boxed{p[X=3] = \dfrac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \dfrac{768}{2401}}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $\boxed{p[X=4] = \dfrac{4^4}{7^4} = \dfrac{256}{2401}}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} \longmapsto [0,1]$$

$$\begin{aligned}
0 &\longmapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}\\
1 &\longmapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}\\
2 &\longmapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}\\
3 &\longmapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}\\
4 &\longmapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}
\end{aligned}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\boxed{\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1}$$

2 I

$$E(X) = \sum_{0}^{4} k \cdot p[X=k]$$

$$= 0\left(\frac{81}{2401}\right) + 1\left(\frac{432}{2401}\right) + 2\left(\frac{864}{2401}\right) + 3\left(\frac{768}{2401}\right) + 4\left(\frac{256}{2401}\right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$

1 II

لدينا : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

يعني :

$$\begin{aligned}
p(E \cap N) &= p_N(E) \times p(N)\\
&= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)\\
&= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \boxed{\frac{12}{55}}
\end{aligned}$$

2 II

$$\begin{aligned}
p(E) &= p(E \cap N) + p(E \cap R)\\
&= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)\\
&= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}\\
&= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \boxed{\frac{87}{385}}
\end{aligned}$$

3 II

لنحسب $p_E(R)$

$$\begin{aligned}
p_E(R) &= \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}\\
&= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}\\
&= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \boxed{\frac{1}{29}}
\end{aligned}$$

التمرين الثالث

1 I

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2\\
&= -4(a-1)^2\\
&= \big(2i(a-1)\big)^2
\end{aligned}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$\boxed{\begin{aligned}
z_1 &= \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}\\
z_2 &= \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}
\end{aligned}}$$

أ 2 I

لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0 < \theta < \pi$ إذن : $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$\begin{aligned}
(a-1) = e^{i\theta} - 1 &= \cos\theta + i\sin\theta - 1\\
&= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta)
\end{aligned}$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1) = r\,e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi)$

أي :

$$\begin{cases}
\cos(\theta) - 1 = r\cos(\varphi)\\
\sin(\theta) = r\sin(\varphi)
\end{cases}$$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta) - 1)^2 + sin^2\theta = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$

يعني : $cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1-\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right)=r^2$

يعني : $2\left(2-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=r^2$

يعني : $r = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r>0$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi \equiv \frac{\theta-\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن : $\boxed{(a-1) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$

I - 2 - ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt2 e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\sqrt2 e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

II - 1

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $\boxed{aff(J) = \frac{aff(A)+aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $\boxed{aff(K) = \frac{aff(A)+aff(B)}{2}=\frac{a-i}{2}}$

II - 2

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C')-aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C)-aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left(c'-\frac{a+i}{2}\right)=i\left(i-\frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1-ia+a+i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}=z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A')-aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A)-aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left(a'-\frac{a-i}{2}\right)=i\left(a-\frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia-1+a-i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}=z_1$$

إذن : $\boxed{c' = z_2 \quad \text{و} \quad a' = z_1}$

II - 3

لدينا :

$$\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2}-\frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2}\times\frac{1}{(a-1)}$$

$$=\frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}} = i$$

إذن : $\frac{a'-c'}{a-1}=i$ و منه : $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{C'A'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C')\perp(AB')$.

التمرين الرابع

1 - أ

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0^+)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 = f(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}x(\ln x)^2=0$$

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-x(\ln x)^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f'_d(0)=0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I .

و كانت f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J .

إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$$

نضع :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

و نضع : $\forall\ x\in\,]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall\ x\in\,]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi\,(x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن تكون الدالة $\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

إذا كان : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\ \epsilon\ \left[\frac{1}{e},+\infty\right[\ \subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

إذن :

$$f'(x)=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-1}{2}-1}\left(1+(x\ln x)^2\right)'$$

$$=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$

$$=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$

$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :

$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ \left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2 أ

لدينا :

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$

$$=\ln(|\ln x|)+c\quad;\quad c\in\mathbb{R}$$

بما أن : $x\in[e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq1$

نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية

للدالة $x\to\frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$.

و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$

إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$.

2 ب

ليكن t عنصرا من المجال $[e,+\infty[$.

نظلق من المتفاوتة $0 < 1$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(t\ln t)^2 < 1+(t\ln t)^2$

و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ **(1)**

و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t > 1$

التي تصبح : $(\forall t \geq e)\ ;\ (t\ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(\forall t \geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2 > 1+(t\ln t)^2$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t > \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ **(2)**

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t}$$

2 ج

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right) < \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} < \frac{1}{t\ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$.

نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x\left(\frac{1}{t\ln t}\right)dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < [\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ +\infty}} < \int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\ln(\ln x)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ +\infty}}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_e^x f(t)\,dt = +\infty}$$

إذن :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\binom{constante}{réelle} + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= (+\infty)+(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$ **(1)**

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا x نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)\times\frac{\ln x}{\ln x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\times\frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ y=\ln x}} \frac{\ln y}{y}\times\frac{\ln x}{x} = 0\times 0 = 0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) = 0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ 0}} < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ 0}}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt = 0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}$$
$$=\left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right)+0=0$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall\, x\in[0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[\,)\ ;F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

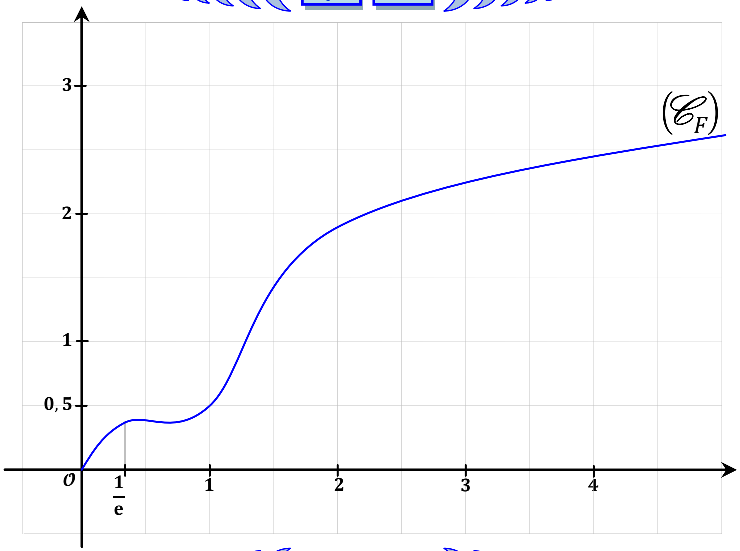
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $\forall\, x\in\,]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathscr{C}_F)$		$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)$$
$$=(+\infty)(1-0)=+\infty$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

<u>**إذا كان**</u> $0\leq x\leq\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

<u>**إذا كان**</u> $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

<u>**إذا كان**</u> : $x\geq 1$ فإن : $f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$.

إذن : $f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

<u>**خلاصة**</u> : $\boxed{\varphi \text{ دالة تزايدية قطعا على المجال } [0,+\infty[}$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi(\,[0,+\infty[\,)$.

و لدينا : $\varphi(\,[0,+\infty[\,) = \left[\varphi(0)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[= [0,+\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall\, y \in [0,+\infty[\,)\,,(\exists!\, x \in [0,+\infty[\,)\ ;\ \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو α_n في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

أو بتعبير أخير : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,(\exists!\ \alpha_n \geq 0)\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

يعني أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ F(\alpha_n) \geq 0$ (1)

و نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq n$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty}$

4 أ

ليكن $n \geq 1$ و $n\in\mathbb{N}$.

لدينا الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x)$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في أي مجال محدود يوجد ضمن $[0,+\infty[$.

في المرحلة الأولى : نختار المجال $[0;\alpha_n]$.

لدينا $[0;\alpha_n] \subset [0,+\infty[$ لأن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر c من المجال $]0;\alpha_n[$ بحيث : $\dfrac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

و منه : $1 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ $(*)$

بما أن $\alpha_n \geq n \geq 1$ فإن $n \in [1;+\infty[$ و $\alpha_n \in [1;+\infty[$

لدينا $\alpha_n \geq n$ إذن $f(\alpha_n) \leq f(n)$ لأن f تناقصية على $[1;+\infty[$

إذن بالرجوع إلى التأطير $(*)$ نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)}$ (1)

في المرحلة الثانية نُطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0;n]$

إذن يوجد عنصر ε من $]0;n[$ بحيث :

$$\boxed{\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)}$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\dfrac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $\boxed{-f(n) < \dfrac{-F(n)}{n} < 0}$ (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)}$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح : $\boxed{\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)}$ (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)}\ (\star)$$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \ \text{ و } \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n} + f(n)\right) = 0$

و منه فإن التأطير $(\star)$ يُصبح :

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ \underset{\underset{n\infty}{\searrow}\ \mathbf{0}}{0} < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \underbrace{\frac{F(n)}{n} + f(n)}_{\underset{n\infty}{\searrow}\ \mathbf{0}}}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare)\quad \lim_{n\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\infty} \left(1 - \dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0 = 1 - \lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1}$

التمرين الخامس

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) &= \ln\left(\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) \\ &= n^2 \ln\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right) \\ &= n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right] \end{aligned}$$

2

نعتبر f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأن ln دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \subset]0;+\infty[$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n\ ;\ n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n\ ;n+1[$ بحيث :

$$(**)\quad \boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)}$$

لدينا : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(arctan(x))'}{arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\ arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2)\ arctan(c)}}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n+1)) - \ln(arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\ arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2)\ arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2)\ arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1 نجد : $\boxed{v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\ arctan(c)}}$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\ ,(\exists\ c\ \epsilon\ ]n;n+1[\ )\ ;\ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\ arctan(c)}}$$

3

لدينا : $n < c < n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$$(1)\quad arctan(n) < arctan(c) < arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

إذن : $(1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2 \quad (2)$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\begin{aligned} (1+n^2)arctan(n) &< (1+c^2)arctan(c) \\ &< (1+(n+1)^2)arctan(n+1) \end{aligned}$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} &< \frac{1}{(1+c^2)arctan(c)} \\ &< \frac{1}{(1+n^2)arctan(n)} \end{aligned}$$

و نضرب أطراف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\begin{aligned} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} &< \frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)} \\ &< \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} \end{aligned}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال 2 نجد :

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}}$$

$$(\otimes)$$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

لدينا :
$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$

و الحمد لله رب العالمين ■