

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014

الموضوع

RS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⴻⵔⴰⵏⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⴻⵔⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⴻⵔⴰⵏⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W. إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين.

- 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25
2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\text{نضع: } b_n = 2 \cdot 10^n + 1 \text{ و } c_n = 2 \cdot 10^n - 1$$

- 1- بين أن: $c_n \not\equiv b_n$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما. 0.5

(b ظ a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

- 2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من ϕ^2 يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$ 0.5

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع $J =]-1, 1[$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

- 1- تحقق أن: $1 + ab > 0$ (" J^2 خ (a, b) ") ثم استنتج أن * قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- (أ) بين أن القانون * تبادلي و تجمعي. 0.5

(ب) بين أن $(J, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن $(J, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

II - نعتبر التطبيق f المعرف على \square بما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من \square نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشاكل من (\square, \times) نحو (J, \perp) حيث: $J^* = J - \{0\}$ 0.5

3- نذكر أن (\square, \times) زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون \perp توزيعي بالنسبة للقانون * في J .

بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (3.25 ن)

1- I حل في f المعادلة: $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $Re(a) > 0$) 0.5

2- (أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\cos \frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ 0.25

(ج) تحقق أن: $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - a$ 0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, u, v) ، نعتبر النقط A و B و M و M'

التي ألقاها على التوالي هي a و $-a$ و z و z' و نفترض أن: $zz' + i = 0$

1- لتكن N النقطة التي لحقها \bar{z} مرافق z

بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان. 0.25

2- (أ) بين أن: $z' - a = i \frac{z - a}{az}$ 0.25

(ب) بين أنه إذا كان $z^1 - a$ فإن $z'^1 - a$ و $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$ 0.5

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية.

بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM 0.5

التمرين الخامس: (7.5 نقط)

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j) بحيث: $\|i\| = 1 \text{ cm}$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ 0.75

3- لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $]0, 1[$ بما يلي: $g_n(x) = f(x) - x^n$

(أ) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0, 1[$ 0.25

(ب) استنتج أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0, 1[$ بحيث: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 0.5

(ج) بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $g_n(a_{n+1}) < 0$ 0.5

(د) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(أ) تحقق أن $0 < a_1 \leq l \leq 1$ 0.25

(ب) تحقق أن: $h(a_n) = n$ (" $n \in \mathbb{N}^*$ ") حيث: $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25

(ج) بين أن: $l = 1$ 0.5

(د) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ 0.25

II - (أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}_+ 0.25

(ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$ (" $x \in \mathbb{R}_+$ ") 0.5

(ج) استنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي: 0.25

$x = 1$ و $x = e^2$ و $y = 0$

$$2- \text{ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(ب) بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$ (" * خ n ")

(ج) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

1- لكل x من ، نضع : $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(أ) تحقق أنه لكل x من المجال $[0, +\infty[$ لدينا: $g(x) = -k(\sqrt{x})$

(ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

(ج) احسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

2- (أ) بين أن: $\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

(ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

انتهى

التمرين الأول

$$U(2N, 2B); V(2N, 2B); W(1N, 2B)$$

(1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U

لكي يتم السحب من الصندوق U يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق W و هذا الاحتمال هو: $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}$$

(2) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيضاوين من $U(2N, 3B)$

أو سحبنا كرة سوداء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيضاوين من $V(3N, 2B)$

$$\text{إذن احتمال هذا الحدث هو: } \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 10} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{7}{30}$$

(3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$p((X=1)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{18}{30} \quad \text{و} \quad p((X=0)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$$

$$p((X=2)) = \frac{7}{30} \quad (\text{2 لدينا حسب السؤال})$$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي X مقدم في الجدول التالي:

k	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n \in \mathbb{N}); c_n = 2 \cdot 10^n - 1 \quad \text{و} \quad b_n = 2 \cdot 10^n + 1$$

(1) لدينا $b_n \wedge c_n = c_n \wedge (b_n - c_n) = c_n \wedge 2$ و بما أن c_n عدد فردي فإن $c_n \wedge 2 = 1$ إذن $c_n \wedge b_n = 1$

نستنتج أن c_n و b_n أوليان في ما بينهما

$$b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$$

(2) بما أن $b_n \wedge c_n = 1$ فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد (x_n, y_n) من \mathbb{N}^2 بحيث $b_n x_n + c_n y_n = 1$

نحدد x_n و y_n باستعمال خوارزمية أقليدس:

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n 10^n + (1 - 10^n) b_n$$

نستنتج أن

$$y_n = 10^n \quad \text{و} \quad x_n = 1 - 10^n$$

Ammarimaths

التمرين الثالث

$$\forall (a, b) \in]-1, 1[; a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad I$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |ab| < 1 \Rightarrow -1 < ab < 1 \Rightarrow 0 < 1+ab < 2 \quad (1)$$

إذن

$$\forall (a, b) \in]-1, 1[; 1+ab > 0$$

$$a * b - 1 = \frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab} < 0 \quad \text{لدينا}$$

$$a * b + 1 = \frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} = \frac{(a+1)(1+b)}{1+ab} > 0 \quad \text{و}$$

نستنتج أن $-1 < a * b < 1$ و منه $a * b \in J$ و بالتالي:

* قانون داخلي في J

(2) أ) لنبين أن القانون * تبادلي و تجميعي

$$\text{لدينا } \forall (x, y) \in J^2; x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x \quad \text{إذن القانون * تبادلي}$$

$$\text{و لدينا } \forall (x, y, z) \in J^3; (x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$\text{و } x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

إذن $\forall (x, y, z) \in J^3; (x * y) * z = x * (y * z)$ و منه القانون * تجميعي

القانون * تبادلي و تجميعي

(ب) تحديد العنصر المحايد

لنحدد e من J بحيث $\forall x \in J; x * e = x$

$$\forall x \in J; x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \stackrel{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow} x+e = x+x^2e \Leftrightarrow (1-x^2)e = 0$$

و بما أن $x \in]-1, 1[$ فإن $1-x^2 \neq 0$ و منه $e = 0$ و $0 \in J$ القانون * تبادلي إذن $\forall x \in J; x * 0 = 0 * x = x$ وهذا يعني أن

0 هو العنصر المحايد للقانون *

(ج) لنبين أن $(J, *)$ زمرة تبادليةليكن x من J و x' مماتله (إذا وجد) بالنسبة للقانون *

$$\text{لدينا } x * x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x$$

و بما أن $x \in]-1, 1[$ فإن $-x \in]-1, 1[$ و القانون * تبادلي إذن $\forall x \in J; x * (-x) = (-x) * x = 0$

Ammarimaths

ومنه لكل x من J مماثل بالنسبة للقانون $*$ هو $-x$
خلاصة: القانون $*$ تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من J مماثل في J إذن

($J, *$) زمرة تبادلية

II f تطبيق معرف على \mathbb{R} ب $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(1) لنبين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو J

ليكن y من J ونحل المعادلة: $f(x) = y$ ($x \in \mathbb{R}$)

$$(x \in \mathbb{R}); f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن $y \in J$ فإن $\frac{y+1}{1-y} > 0$ ومنه لكل y من J سابق و حيد في \mathbb{R} هو $\ln \frac{y+1}{1-y}$ نستنتج أن

f تقابل من \mathbb{R} نحو J

ملاحظة: يمكن أن نبين تقابل f باستعمال اتصال و رتبة f .

(2) \perp قانون معرف على J ب: $(\forall (x, y) \in J^2); x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

لنبين f أن تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp) بحيث $J^* = J \setminus \{0\}$

لدينا $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$

و بما أن g هو التقابل العكسي ل f فإن $g(f(x)) = x, g(f(y)) = y$

نستنتج أن $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$ وهذا يعني أن

أن f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp)

(3) لنبين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

لدينا f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp) و (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية إذن (J^*, \perp) زمرة تبادلية

و لدينا $(J, *)$ زمرة تبادلية و \perp توزيعي على $*$ نستنتج أن

$(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع

I (1) لنحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + i = 0$

لدينا $z + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

بما أن a هو حل المعادلة بحيث $\text{Re}(a) > 0$ فإن $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{-a, a\}$$

(2) معيار و عمدة العدد العقدي $1+a$ لدينا

$$1+a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

نستنتج أن

$$|1+a| = 2 \cos \frac{\pi}{8} \text{ و } \arg(1+a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$$

Ammarimaths

$$\text{ب) استنتاج } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{حسب السؤال السابق لدينا } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} |1+a| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومنه

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{ج) لنبين أن } (1+a)(1-a) = 1+i$$

$$\text{لدينا } (1+a)(1-a) = 1-a^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}(+2i)\right) = 1+i$$

إذن

$$(1+a)(1-a) = 1+i$$

استنتاج الشكل المثلثي ل $1-a$

$$1-a = \frac{1+i}{1+a} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2 \cos \frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8}\right] = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right] \text{ لدينا}$$

إذن الشكل المثلثي للعدد $1-a$

$$1-a = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right]$$

II في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) لدينا M, B, A و M' والنقط التي أحاطها على التوالي $a, -a, z$ و z' . بحيث $zz' + i = 0$ و N النقطة التي لحقها \bar{z} .

1) لنبين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

$$\text{لدينا } \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) \equiv \text{Arg} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) (2\pi) \text{ و } \left(\overline{OM'}, \overline{ON} \right) \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) (2\pi)$$

$$\text{و بما أن } \left(\overline{OM'}, \overline{ON} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ و منه } \text{Arg} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ فإن } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z\bar{z}}{z^2} = \frac{z\bar{z}}{-i} = iz\bar{z} = \left[z\bar{z}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ وهذا يعني أن}$$

المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

$$\text{2) (أ) لنبين أن } z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{لدينا } z' - a = \frac{-i}{z} - a = \frac{-i - az}{z} = \frac{-ia - a^2 z}{az} \stackrel{(a^2 = -i)}{=} \frac{-ia + iz}{az} = i \frac{z-a}{az}$$

و هذا هو المطلوب

$$z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{ب) لدينا } z' + a = z' - a + 2a = i \frac{z-a}{az} + 2a = \frac{iz - ia + 2a^2 z}{az} = -i \frac{z+a}{az}$$

$$\text{ومنه } z \neq -a \Rightarrow z+a \neq 0 \Rightarrow z' + a \neq 0 \Rightarrow z' \neq -a$$

Ammarimaths

أي أن :

$$\boxed{\text{إذا كان } z \neq -a \text{ فإن } z' \neq -a}$$

$$\text{ولدينا } z' - a = i \frac{z-a}{az} \text{ و } z' + a = -i \frac{z+a}{az} \text{ إذن } \frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i \frac{z-a}{az}}{-i \frac{z+a}{az}} = -\frac{z-a}{z+a}$$

$$\boxed{\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z-a}{z+a}}$$

(3) بما أن النقط M, B, A غير مستقيمة فإن النقط M, B, A و M' غير مستقيمة

$$\text{إذن } M, B, A \text{ و } M' \text{ متداورة يكافئ } \frac{z-a}{z+a} \times \frac{z'+a}{z+a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ولدينا } \frac{z-a}{z+a} \times \frac{z'+a}{z+a} = -1 \Rightarrow \frac{z-a}{z+a} = -\frac{z'+a}{z+a} \Rightarrow \frac{z-a}{z'+a} \times \frac{z'+a}{z+a} = -1$$

ومنه

النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث AMB

التمرين الخامس

$$f \text{ دالة معرفة على }]0, +\infty[\text{ ب } f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

(1) حساب نهايتي f عند 0^+ و عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (لأن) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

التأويل الهندسي

: محور الافاصيل مقارب ل (C) و محور الارايب مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

(2) حساب مشتقة f

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ ولدينا } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x \ln x - 2x}{2x^2 \sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x - 2$ أي إشارة $\ln x - \ln e^2$ و منه

$$\boxed{f \text{ تزايدية قطعاً على المجال } [e^2, +\infty[\text{ و تناقصية قطعاً على }]0, e^2]}$$

$$(3) g_n \text{ دالة معرفة على }]0, 1[\text{ ب } g_n(x) = f(x) - x^n \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

Ammarimaths

(أ) لنبين أن تناقصية قطعاً على $]0,1[$

g_n قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ ولدينا $(\forall x \in]0,1[); g'_n(x) = f'(x) - nx^{n-1}$
بما أن $(\forall x \in]0,1[); f'(x) < 0$ فإن $(\forall x \in]0,1[); g'_n(x) < 0$ ومنه

 g_n تناقصية قطعاً على $]0,1[$
(ب) لنبين أن $\exists! \alpha_n \in]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

g_n متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]0,1[$ إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]0,1[$ ولدينا

$$g_n(]0,1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) \right[=]-1, +\infty[$$

و بما أن $0 \in]-1, +\infty[$ فإن للمعادلة ل 0 سابق و حيد α_n ب g_n و $\alpha_n \in]0,1[$ يعني $g_n(\alpha_n) = 0$
و بما أن $g_n(\alpha_n) = f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n$ فإن $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ و هذا هو المطلوب:

 $\exists! \alpha_n \in]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$
(ج) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

حسب السؤال (ج) $\forall n \in \mathbb{N}^*; n+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists! \alpha_{n+1} \in]0,1[$

ولدينا $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$ إذن $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n = (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1) < 0$
و هذا هو المطلوب

 $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$
(د) لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* g_n(\alpha_n) = 0$ و $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$ و بما أن g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0,1[$ فإن $\alpha_{n+1} > \alpha_n$
ما يعني أن :

 المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً

المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة

(4) (أ) لنتحقق من أن $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \in]0,1[$ فإن $\lim \alpha_n \in]0,1[$ و بما أن $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \geq \alpha_1$

و منه $\lim \alpha_n \geq \alpha_1$ نستنتج أن l نهاية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تحقق

 $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$
(ب) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$

لدينا $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

$(\forall x > 0); f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ و بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

فإن $(\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \frac{-\ln \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$

Ammarimaths

و منه

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) = n$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$$

(ج) لنبين أن $l = 1$ نفترض أن $l \neq 1$ إذن $0 < l < 1$ و بما أن الدالة h معرفة و متصلة على المجال $]0, 1[$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(l)$ و هذا غير ممكن لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$l = 1$$

(د) لنبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n = \ln(1) < 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \alpha_n = -\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \alpha_n} = 0$ و هذا هو المطلوب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

(II- 1) لندرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}^* لدينا $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و $x = 1 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx = 0$

نستنتج أن

$$(\forall x \in]0, +\infty[); \int_x^1 f(x) dx \geq 0$$

(ب) لنبين أن $(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$

$$\begin{aligned} (x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx &= \int_x^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} (-\ln x) \right]_x^1 - \int_x^1 (2\sqrt{x}) \left(\frac{-1}{x} \right) dx = 2\sqrt{x} \ln x + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x + 2 \left[2\sqrt{x} \right]_x^1 = 2\sqrt{x} \ln x + 4(1 - \sqrt{x}) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x \end{aligned}$$

و منه

$$(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

(ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي $x = 0$ و $x = e^2$ و $x = 1$ لتكن S هذه المساحة ب cm^2 لدينا $S = \left(\int_{e^2}^1 f(x) dx \right) cm^2 = \left(4 - 4\sqrt{e^2} + 2\sqrt{e^2} \ln e^2 \right) cm^2 = 4cm^2$

المساحة المطلوبة هي

$$S = 4cm^2$$

Ammarimaths

$$(2) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) لدينا f متصلة وتناقصية قطعاً على $]0,1[$ و $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset]0,1[$ إذن f متصلة وتناقصية قطعاً على $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ومنه

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\text{ولدينا } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \text{ و } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

نستنتج أن لكل n و k من \mathbb{N} بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(ب) \text{ المتفاوتة السابقة تستلزم أن: } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{لدينا } f(1) = 0 \text{ إذن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n$$

$$\text{ولدينا } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{كما أن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

$$\text{نستنتج بعد التعويض في (1) أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{يعني أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(ج) \text{ حسب السؤال (ب) و بوضع } x = \frac{1}{n} \text{ نحصل على } \int_x^1 f(x) dx \leq u_n \leq xf(x) + \int_x^1 f(x) dx$$

$$\text{ولدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} xf(x) + \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\lim u_n = 4$$

التمرين السادس

$$(\forall x \in \mathbb{R}); k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \text{ و نضع } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt \text{ ب } [0, +\infty[$$

$$(1) \text{ (أ) لدينا } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -k(\sqrt{x})$$

أذن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = -k(\sqrt{x})$$

Ammarimaths

(ب) اتصال و اشتقاق الدالة g

الدالة $t \rightarrow e^{-t^2}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (أصلية φ التي تنعدم عند 1)
و الدالة $t \rightarrow \sqrt{t}$ متصلة على $[0, +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ (مركب k و ψ)
إذن:

$$g \text{ متصلة على } [0, +\infty[\text{ و قابلة للاشتقاق على } [0, +\infty[$$

(ج) حساب $g'(x)$

$$\text{لدينا } (\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) = -k'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

بما أن $(\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) < 0$ فإن g تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$ و بما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$

$$\text{الدالة } g \text{ تناقصية قطعاً على } [0, +\infty[$$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \quad (2)$$

ليكن x من \mathbb{R}_+^* الدالة g متصلة على المجال $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0, x[$

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية يوجد c من $]0, x[$ بحيث

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{x} \\ c^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2 < -c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ 0 < e^{-x^2} < e^{-c^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

الصفحة (8)

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \text{ ومنه}$$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

(ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases} \text{ لدينا:}$$

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

