المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع

9	المعامل:	NS25	الرياضيات		المـــادة:
4	مدة الإنجاز:		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعـب(ة) أو المسلك :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

-Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques .
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes .
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique .
-Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices programmables sont strictement interdites

Exercice 1 :(3,5 points) **Les partis I et II sont indépendantes.**

I -On munit l'ensemble $I =]0,+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (a,b) \in I \times I\right) \quad a * b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0,5 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I .

0,25 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.

0,75 3) a-Montrer que $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1).

0,25 b-Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$.

4)On munit I de la loi de composition interne $\times$ ($\times$ est la multiplication dans $\mathbb{R}$)

0,25 a-Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$

0,5 b-Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

II-On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 1) Calculer A^2 et A^3

0,5 2) En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

0,25 1)a-Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3+4i$

0,5 b-Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\operatorname{Re}(a) < 0$ et soient A et B leurs points images respectifs dans le plan complexe.

0,25 a-Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$

0,75 b- En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A.

3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

0,5 a-Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D

0,5 b-Déterminer en fonction de c le nombre complexe ℓ affixe du point L

0,75 c-Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{\ell - c}{a - c}$;en déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 :(3 points)

1 1)Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2+1\equiv 0\quad [5]$

2)Soit p un nombre premier tel que $p=3+4k$ où k est un nombre entier naturel .

Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2+1\equiv 0\,[p]$

0,25 a-Vérifier que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\,[p]$

0,5 b- Montrer que n et p sont premiers entre eux.

0,75 c- En déduire que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\,[p]$

0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2+1\equiv 0\,[p]$

Exercice 4 : (6.25 points)

I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=4xe^{-x^2}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,5 1)Calculer la limite de f en $+\infty$

0,75 2)Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,75 3)Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe (C) à l'origine du repère puis construire la courbe (C).(on prend $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe (C))

0,5 4) Calculer l'intégrale $a=\int_0^1 f(x)dx$ puis en déduire, en centimètre carré , l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C) ,les deux axes du repère et la droite d'équation $x=1$

II) Soit n **un entier naturel supérieur ou égal à 2** .

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

0,25 1) a- Montrer que : $(\forall x>1)\quad e^{-x^2}<e^{-x}$

0,25 b- En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$

0,75 2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 3)Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(u_n)=1$

0,25 4) a-Montrer que : $(\forall n\geq 2)\qquad f_{n+1}(u_n)=u_n$

0,75 b-montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4)On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0,25 a-Montrer que : $0 < \ell \leq 1$

0,25 b-Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ $\quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c-En déduire que : $\ell = 1$

<u>Exercice</u> 5 : (3.75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$

0,25 1)Montrer que F est impaire.

2)Pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ on pose : $\quad \varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$

0,25 a-Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0,5 b-Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 c-En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 3) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad (\exists c \in]x,2x[) \ : \ F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x > 0)$ $\quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c-Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

0,75 d-Montrer que : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
و التعليم العالي
و تكوين الأطر
و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
عناصر الإجابة

الصفحة 1 / 3

المـــادة:	الرياضيات	NR25	المعامل: 9
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		مدة الإنجاز: 4

التمرين الأول (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1-I	القانون * تبادلي .... 0.25ن القانون * تجميعي 0.25ن
(2	العنصر المحايد : $\varepsilon = e$ 0.25ن
(3 أ-	$I\setminus\{1\}$ جزء مستقر من $(I,*)$ .... 0.25ن القانون المستخلص من * تبادلي وتجميعي ويقبل ε كعنصر محايد في $I\setminus\{1\}$ .... 0.25ن جميع عناصر $I\setminus\{1\}$ تقبل مماثلا في $I\setminus\{1\}$ 0.25ن
ب-	تطبيق الخاصية المميزة لزمرة جزئية......................... 0.25ن
(4أ-	$a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$ 0.25ن
ب-	$(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 1........................... 0.25ن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون × و $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية......... 0.25ن
(1-II	نجد : $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .... 0.25ن و $A^3=O$ 0.25ن
(2	إذا كانت A تقبل مقلوبا نستنتج أن $A^2=O$ و هذا تناقض......................... 0.5 ن
التمرين الثاني (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1 أ-	الجذران المربعان هما $2+i$ و $-2-i$.................. 0.25ن
ب-	حلا المعادلة هما: $-\frac{1}{2}+i$ و $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ 0.5ن
(2 أ-	.... 0.25ن
ب-	.... 0.75ن
(3 أ-	نحصل على : $d=(1-i)c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ 0.5ن

ب-	نحصل على : $\ell=(1-i)c-1-\frac{1}{2}i$ 0.5ن
ج-	نحصل على: $\frac{\ell-c}{a-c}=i$ ....0.25ن ثم نستنتج أن: -المثلث ACL متساوي الساقين رأسه C.................0.25ن - المثلث ACL قائم الزاوية في C.................0.25ن
التمرين الثالث (3 نقط)	عناصر الإجابة
(1	نجد $m\equiv 2\ [5]$ أو $m\equiv 3\ [5]$..............1ن
(2 أ-	لدينا : $n^2\equiv -1\ \ [p]$ إذن $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv(-1)^{1+2k}[p]$ 0.25ن
ب-	لدينا $n^2+1\equiv\ [p]$ إذن: $kp-n^2=1$ $(\exists k\in □)$ وحسب مبرهنة بوزو 0.5ن
ج-	حسب مبرهنة فيرما وكون: $p-1=2+4k$ 0.75ن
د-	من الأسئلة السابقة نستنتج أن : $1\equiv -1\ [p]$ و p عدد أولي فردي و هذا تناقض........0.5ن
التمرين الرابع (6.25 نقط)	عناصر الإجابة
(I-1	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 0.5ن
(2	f تزايدية على المجال $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ ....0.5ن جدول تغيرات f 0.25ن
(3	معادلة نصف المماس.........................0.25ن إنشاء (C) 0.5ن
(4	نحصل على $a=2\left(\frac{e-1}{e}\right)$ ....0.25ن مساحة الحيز المستوى هي: $8\left(\frac{e-1}{e}\right)cm^2$. 0.25ن
(II-1 أ-	.........................0.25ن
ب-	لدينا : $0<x^ne^{-x^2}<x^ne^{-x}$ $(\forall x>1)$ و نحصل على $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ 0.25ن
(2	f_n تزايدية على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty\right[$ ....0.5ن جدول تغيرات f_n 0.25ن
(3	لدينا : $f_n(0)=0<1$ و $f_n(1)=\frac{4}{e}>1$ و f_n متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[0,1]$ 0.5ن
(4 أ-	لدينا: $f_{n+1}(u_n)=4u_n^{n+1}e^{-u_n^2}=u_n$ 0.25ن
ب-	لدينا : $f_{n+1}(u_n)=u_n<1=f_{n+1}(u_{n+1})$ و f_{n+1} وتزايدية قطعا على المجال $[0,1]$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا...................................0.5 ن

	المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا و مكبورة بالعدد 1 إذن متقاربة 0.25ن
5) أ-	لدينا : $0\leq \ell \leq 1$ و $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا إذن $u_n > u_2 > 0 \quad (\forall n>2)$..........0.25ن
ب-	لدينا : $f_n(u_n)=1$ تكافئ $\ln(4)+n\ln(u_n)=u_n^2$ وبما أن: $0<u_n<1$ 0.25ن
ج-	لدينا : $-\dfrac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n} \qquad (\forall n\geq 2)$ والدالة $x\to\ln(x)$ متصلة على $]0,1]$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ عندما تؤول n إلى $+\infty$ نحصل على $\ln(\ell)=0$ ....0.5ن و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى
التمرين الخامس (3.75 نقط)	عناصر الإجابة
1)	الدالة F فردية 0.25ن
2)أ-	..............................0.25ن
ب-	الدالة φ دالة أصلية للدالة $t\to\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0,+\infty[$ أو الدالة $t\to\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ والدالتين $u:x\to 2x$ و $v:x\to x$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $u(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$ و $v(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$ ....0.25ن و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى لدينا $F'(x)=\dfrac{2}{\ln(1+4x^2)}-\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$ 0.25ن
ج-	الدالة تناقصية قطعا على المجال $]0,\sqrt{2}]$ و تزايدية قطعا على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ 0.5ن
3) أ-	لدينا: $(\forall x>0)\ F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$ حيث φ دالة أصلية للدالة $t\to\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0,+\infty[$ ثم نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية 0.5ن
ب-	الدالة $t\to\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ تناقصية قطعا على $[x,2x]$............0.5ن
ج-	نجد: $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$ و تمنح 0.25 ن لكل نهاية
د-	تمنح 0.25ن لكل متفاوتة لدينا $F(x)<x \ \left(\forall x>\sqrt{e-1}\right)$ و $F(x)>x \ \left(\forall x<\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$ ويوجد عدد وحيد α من المجال $\left]\dfrac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right[$ بحيث $F(\alpha)=\alpha$ 0.25ن