

EXERCICE1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire

de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur \mathbb{C} par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur \mathbb{C} .

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est associative sur \mathbb{C} .

0.25 c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

0.25 d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x + yi$ admet le nombre complexe

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i \text{ comme symétrique pour la loi } *$$

2-On considère le sous-ensemble E de \mathbb{C} défini par : $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

0.25 a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans \mathbb{C} .

0.5 b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

0.5 3-On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$

4-On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \right\}$

0.25 a) Montrer que F est stable pour la loi \times dans $M_2(\mathbb{R})$

0.5 b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x + yi$ de E fait correspondre

$$\text{la matrice } M(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \text{ de } F$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers (F, \times)

0.25 c) En déduire que (F, \times) est un groupe commutatif.

**EXERCICE2** : (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- On considère dans \mathbb{C} , l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0.5 a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

0.25 b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a = 1 + i$, B le point d'affixe $b = (1 + i)m$, C le point d'affixe

$c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du

segment $[CD]$.

0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

0.5 c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0.5 a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

0.25 b) En déduire h en fonction de m

EXERCICE3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un **nombre premier**.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1- On suppose dans cette question que 2969 **ne divise pas** n

0.5 a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}) ; u \times n \equiv 1 \pmod{2969}$

0.5 b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

0.5 c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0.5 d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \pmod{2969}$

0.5 2-a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 **divise** n

0.5 b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2969}$ et $m \equiv 0 \pmod{2969}$

EXERCICE4 : (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5 2- a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

0.75 b) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} , puis donner son tableau de variations.

0.5 c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left] \frac{3}{2}, 2 \right[$ tel que $f(\alpha) = 0$

(On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$)

0.25 d) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

0.5 3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f' , montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

0.5 b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'' , montrer que, pour tout

réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

0.25 c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

0.5 4-a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, $f(1) = -0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0.25 5-a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$; $f(x) \leq 0$

0.75 b) Montrer que : $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$, en déduire que : $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$

0.5 c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n$$

0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < \alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

0.25 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2- On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$ (On prendra : $\ln 2 = 0.69$)

b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n$

0.5 (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3- On suppose que $u_0 < 0$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

0.25 c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN