

**Exercice 1 : (3 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, -1, -1)$ ,  $B(0, -2, 1)$  et  $C(1, -2, 0)$

- 0.75 1) a) Montrer que  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$   
0.5 b) En déduire que  $x + y + z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
- 2) Soit  $(S)$  la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$
- 0.75 Montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est  $\Omega(2, -1, 1)$  et que son rayon est  $R = \sqrt{5}$
- 0.5 3) a) Calculer  $d(\Omega, (ABC))$  la distance du point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$   
0.5 b) En déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  ( la détermination du centre et du rayon de  $(\Gamma)$  n'est pas demandée )

**Exercice 2 : (3 points)**

- 0.75 1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 2z + 4 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = 1 - i\sqrt{3}$ ,  $b = 2 + 2i$ ,  $c = \sqrt{3} + i$  et  $d = -2 + 2\sqrt{3}$
- 0.5 a) Vérifier que  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$   
0.25 b) En déduire que les points  $A, C$  et  $D$  sont alignés.
- 3) On considère  $z$  l'affixe d'un point  $M$  et  $z'$  l'affixe de  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{-\pi}{3}$
- 0.5 Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}az$
- 4) Soient  $H$  l'image du point  $B$  par la rotation  $R$ ,  $h$  son affixe et  $P$  le point d'affixe  $p$  tel que  $p = a - c$
- 0.5 a) Vérifier que  $h = ip$   
0.5 b) Montrer que le triangle  $OHP$  est rectangle et isocèle en  $O$

**Exercice 3 : (3 points)**

Une urne contient dix boules : trois boules vertes , six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher . On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

On considère les événements suivants : A : « Obtenir trois boules vertes . »

B : « Obtenir trois boules de même couleur . »

C : « Obtenir au moins deux boules de même couleur . »

- 2 1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{120}$  et  $p(B) = \frac{7}{40}$   
1 2) Calculer  $p(C)$ .

**Problème : (11 points)****Première partie :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1 cm)

- 0.5 1) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  puis interpréter le résultat géométriquement
- 0.25 2) a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$
- 0.5 b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 0.5 c) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$   
puis en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$
- 0.75 d) Montrer que  $(C)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$
- 0.5 3) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, 1]$  :  $(x - 1) + \ln x \leq 0$   
et que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$  :  $(x - 1) + \ln x \geq 0$
- 1 b) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$
- 0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$
- 0.5 4) a) Montrer que  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$
- 0.5 b) En déduire que  $(C)$  admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .
- 0.5 5) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  et déduire la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$
- 1 b) Construire  $(\Delta)$  et  $(C)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 0.5 6) a) Montrer que la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $h : x \mapsto \ln x$  sur  $]0, +\infty[$
- 0.75 b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$
- 0.5 c) Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(C)$  et  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$



## Deuxième partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 0.5 1) a) Montrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq e$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante .
- 0.5 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente .
- 0.75 2) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .