التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(-3,0,0)$
و $B(0,0,-3)$ و $C(0,2,-2)$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 3

1,25 ن — 1 أ) بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$
ثم استنتج أن $2x-y+2z+6=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0,75 ن — 1 ب) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ و استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

2) ليكن (D) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC) .

0,50 ن — 2 أ) بين أن : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \quad ; \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

0,50 ن — 2 ب) بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) هو $(-1,2,-1)$.

التمرين الثاني : (3 ن)

1) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a=(2-i)$ و $b=(6-7i)$ و $c=(8+3i)$

0,75 ن — 1 أ) بين أن : $\frac{c-a}{b-a}=i$

0,75 ن — 1 ب) استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

2) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω منتصف $[BC]$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

0,50 ن — 2 أ) تحقق من أن لحق النقطة Ω هو $\omega=(7-2i)$.

0,75 ن — 2 ب) بين أن : $z'=-iz+9+5i$

0,25 ن — 2 ج) بين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$.

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=3 \end{cases}$

0,50 ن — 1) بين بالترجع أن : $u_n>1$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

2) نضع : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

0,50 ن — 2 أ) تحقق من أن : $1-v_n=\dfrac{2}{u_n+1}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ و استنتج أن : $1-u_n>0$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

0,50 ن — 2 ب) بين أن : $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

ن 1,00		3	أ	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و اكتب v_n بدلالة n .
ن 0,50		3	ب	بين أن : $\lim_{n\infty} v_n = 0$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

ن 1,00		1	بين ان احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{1}{22}$.
ن 1,00		2	بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{3}{44}$.
ن 1,00		3	بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو $\frac{37}{44}$.

التمرين الخامس : (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x) = x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ن 0,75		1		بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)$ و استنتج أن O مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C})$.
ن 0,50		2		تحقق من أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ (يستحسن استعمال هذه الصيغة لـ $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)
ن 1,25		3	أ	بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ و تحقق أن : $f'(0) = \frac{3}{2}$.
ن 0,50		3	ب	بين أن الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$.
ن 0,50		3	ج	بين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O .
ن 0,50		4	أ	بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
ن 0,50		4	ب	أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x+1)\right)$ و استنتج أن $(D) : y = x + 1$ مقارب لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$
ن 0,25		4	ج	بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (D) .
ن 1,50		5		أنشئ المستقيمين (D) و (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$ (نذكر أن O مركز تماثل $(\mathscr{C})$).
ن 0,75		6	أ	بين أن الدالة : $H : x \to x - \ln(e^x + 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to \frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.
ن 0,50		6	ب	استنتج أن : $\int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{e^x + 1}dx = \ln 4 - \ln 3$
ن 0,50		6	ج	أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = 0$ و $x = \ln 2$.

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k})$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

يعني : $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني : $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني : $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega,(ABC)) = 3 = Rayon(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R})$; $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x - 1 = 6\theta \\ y - 1 = -3\theta \\ z - 1 = 6\theta \end{cases}$; $(\theta \in \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases}$; $(\theta \in \mathbb{R})$

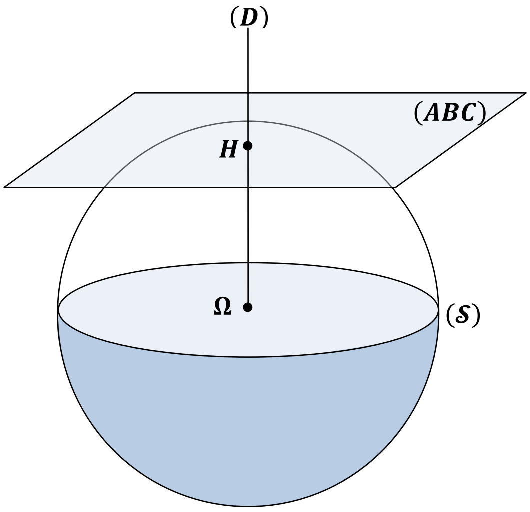
يعني : $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases}$; $(\theta \in \mathbb{R})$

نضع : $3\theta = t$ نحصل على : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ $(\mathcal{S})$ في H . فإن : $\boxed{(\Omega H) \perp (ABC)}$ (1)

و نعلم أن : $\boxed{(D) \perp (ABC)}$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $\boxed{H \in (D)}$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و لدينا : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases} H(\alpha,\beta,\gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلوث (α,β,γ) يحقق كلاً من التمثيل البارمتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$2(2t+1) - (-t+1) + 2(2t+1) + 6 = 0$$

يعني : $4t + t + 4t + 9 = 0$ إذن : $\boxed{t = -1}$

نعوض t بقيمته -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1)+1 = -1 \\ \beta = -(-1)+1 = 2 \\ \gamma = 2(-1)+1 = -1 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(-1,2,-1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{(8+3i)-(2-i)}{(6-7i)-(2-i)} = \dfrac{6+4i}{4-6i} = \dfrac{3+2i}{2-3i}$

$$= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+13i-6}{2^2-(3i)^2} = \frac{13i}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a} = i}$ $(*)$

1 ب

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$ إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |i| \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i)\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c-a| = |b-a| \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \dfrac{aff(B)+aff(C)}{2}$

يعني : $aff(\Omega) = \dfrac{(6-7i)+(8+3i)}{2} = (7-2i) = \omega$

2 ب

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مُعرف بما يلي : $\mathcal{R}_{\Omega}\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) : \begin{matrix} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{matrix}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow\ (z' - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow\ z' - (7-2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z-7+2i)$$
$$\Leftrightarrow\ z' - (7-2i) = (-i)(z-7+2i)$$
$$\Leftrightarrow\ z' = -iz+7i+2+7-2i$$
$$\Leftrightarrow\ z' = -iz+5i+9$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعَبِّرُ عن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

و بذلك يصبح الدوران $\mathcal{R}$ مُعَرّف بما يلي :

$$\mathcal{R}_{\Omega}\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{matrix} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(-iz+5i+9) \end{matrix}$$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i\,aff(A)+5i+9$

لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2-i)$

إذن : $-i\,aff(A)+5i+9 = -i(2-i)+5i+9$

$$= -2i-1+5i+9 = 3i+8 = aff(C)$$

حصلنا إذن على : $-i\,aff(A)+5i+9 = aff(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $\boxed{(P_n) :\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n > 1}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$
يعني نحتاج إلى : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$
يعني نحتاج إلى : $4u_n+3 > 3u_n+4$
يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$
و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الإفتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن : $4u_n - 3u_n > 4-3$ يعني : $4u_n+3 > 3u_n+4$

يعني : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \implies (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n\epsilon\mathbb{N})$. لدينا : $1-v_n = 1-\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

$$= \frac{u_n+1}{u_n+1} - \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{2}{u_n+1}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

و نعلم حسب السؤال 1) أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n > 1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n+1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{1}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{2}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n > 0$

2 ب

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال أ) : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

إذن : $v_n(u_n+1) = u_n - 1$

يعني : $v_nu_n + v_n = u_n - 1$

أي : $v_nu_n - u_n = -1 - v_n$

يعني : $u_n(v_n-1) = -1-v_n$

أي : $u_n = \dfrac{-1-v_n}{v_n-1}$ أي : $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n+1}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_{n+1}+1}$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n+3}{3u_n+4}+1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n+7}{3u_n+4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n+4)}{7u_n+7} = \frac{7u_n+7-6u_n-8}{7u_n+7}$$

$$= \frac{(u_n-1)}{7(u_n+1)} = \frac{1}{7} v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$

يعني : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي : $v_n = v_0\left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$

لدينا : $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$ إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

3 ب

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}(v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

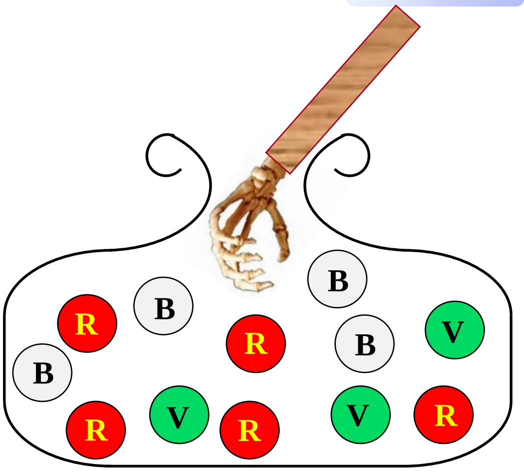
يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n+1 = \dfrac{2}{1-v_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{2}{1-v_n} - 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2}{1-v_n}-1\right) = \dfrac{2}{1-0}-1 = 1$

يعني : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n)=1}$

التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تَحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) = \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء أو الحصول على ثلاث كرات بيضاء أو الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\left(\text{الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل}\right) = p\left(\text{ثلاث كرات حمراء أو كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر أو كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\right)$$

$$= p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\right) + p\left(\text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر}\right) + p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= \frac{C_5^1\times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2\times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3\times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5\times 21}{220} + \frac{10\times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان $\bar{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{$ الحصول على كرة واحدة على الأقل $\}$

إذن : $\bar{A} = \{$ الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر $\}$

$$p\begin{pmatrix}\text{ثلاث كرات}\\ \text{تخالف اللون}\\ \text{الأحمر}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{كرتين خضراوين و الأخرى بيضاء} \text{ أو } \text{كرتين بيضاوين و الأخرى خضراء} \text{ أو } \text{ثلاث كرات خضراء} \text{ أو } \text{ثلاث كرات بيضاء}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{كرتين}\\ \text{خضراوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{بيضاء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{كرتين}\\ \text{بيضاوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

يعني : $p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44-7}{44} = \frac{37}{44}$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :

1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

إذن :
$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$
$$= -x + \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x} = -\left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .

2

لدينا :
$$x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$$
$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

3 أ

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن :
$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)'$$
$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}\right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

من أجل $x = 0$ نحصل على :
$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3 ب

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

و منه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3 ج

نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

و لدينا : $f'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0) = 0$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$

4 أ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)$$
$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty}\right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$

4 ب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1}\right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

و منه : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم : $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 ج

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= (x+1) - \frac{2}{e^x+1} - (x+1) \\ &= \frac{-2}{e^x+1} \end{aligned}$$

و نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x + 1 > 0$

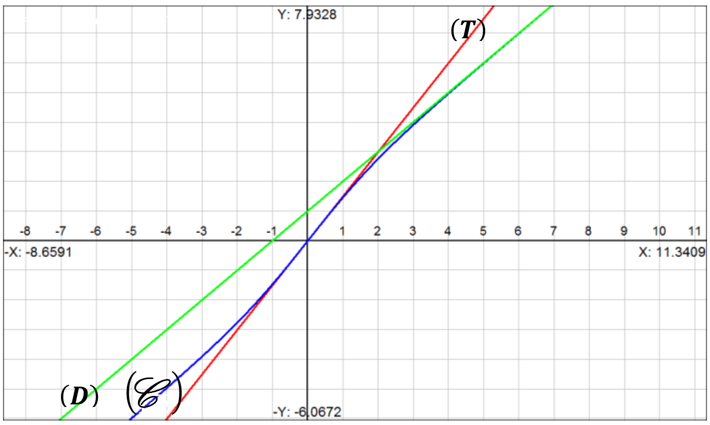
يعني : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{-2}{e^x+1} < 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) - (x+1) < 0$

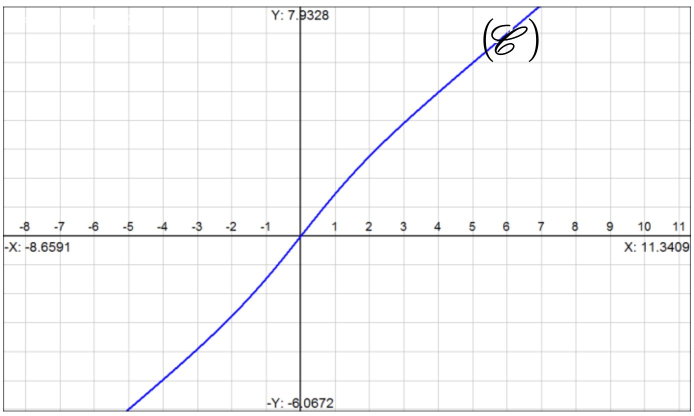
يعني : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) < (x+1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$

5



المنحنى $(\mathscr{C})$ لوحده



6 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x - \ln(e^x+1))' \\ &= 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} = h(x) \end{aligned}$$

إذن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

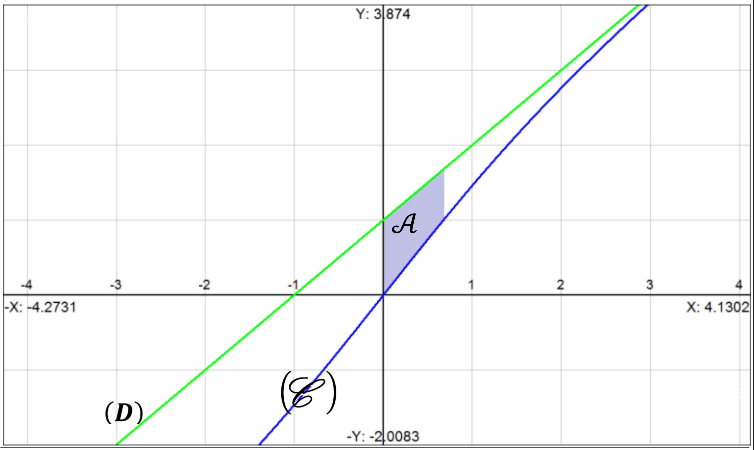
6 ب

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx &= \int_0^{\ln 2} h(x)\, dx = [H(x)]_0^{\ln 2} \\ &= [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)|\, dx = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{-2}{e^x+1}\right| dx \\ &= 2\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = 2\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 0{,}57\ unité^2 \end{aligned}$$



صورة أخرى للمساحة $\mathcal{A}$